1 ПОСТРОЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ. ЧАСТЬ 1

ОСНОВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

На предыдущих уроках мы изучали алгебраические числа, расширения полей и их размерности. Следующие несколько уроков мы посвятим классическим задачам на построение циркулем и линейкой, к решению которых данная теория имеет непосредственное отношение.

Итак, у нас есть два инструмента: циркуль и линейка.

- Линейка позволяет провести прямую через две данные точки.
- Циркуль позволяет провести окружность данного радиуса с центром в данной точке.

Каждое построение можно осуществить по алгоритму, который состоит из некоторого набора основных построений:

- отложить отрезок, равный данному;
- построить угол, равный данному;
- разделить угол пополам;
- разделить отрезок пополам (построить серединный перпендикуляр);
- разделить отрезок в данном отношении;
- построить перпендикуляр через данную точку к данной прямой и т.д.

При построении мы получаем точки на плоскости в результате пересечения уже построенных прямых и окружностей.

ПОСТРОЕНИЯ И КВАДРАТИЧНЫЙ КАЛЬКУЛЯТОР

Предположим, что мы производим построения на координатной плоскости, т.е. у нас есть начало отсчета, взаимно перпендикулярные оси и задан единичный отрезок.

ВОПРОС: Какие точки доступны для построения?

Мы можем отложить отрезок любой целой длины, отложив несколько раз единичный отрезок. При помощи теоремы Фалеса мы можем разделить отрезок на любое количество частей, а значит, можем также построить отрезок любой дробной длины. Таким образом, мы можем попасть в любую точку с рациональными координатами.

Кроме этого, мы можем отложить отрезок длины $\sqrt{2}$ как гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого есть единичный отрезки. Аналогично могут быть построены все квадратные корни из целых чисел.

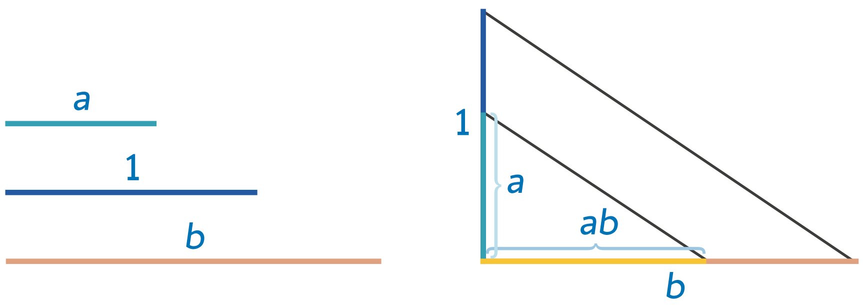
Рассмотрим множество всех чисел, которые могут быть получены из 1 с помощью всевозможных арифметических операций из набора квадратичного калькулятора $(+, -, \cdot\,, :\,, \sqrt{\ })$.

УТВЕРЖДЕНИЕ

На координатной плоскости с помощью циркуля и линейки может быть получен отрезок любой длины, которая вычислима на квадратичном калькуляторе.

Продемонстрируем, как можно построить результат каждой из арифметических операций. Сложение и вычитание очевидно.

ПОСТРОЕНИЕ УМНОЖЕНИЯ

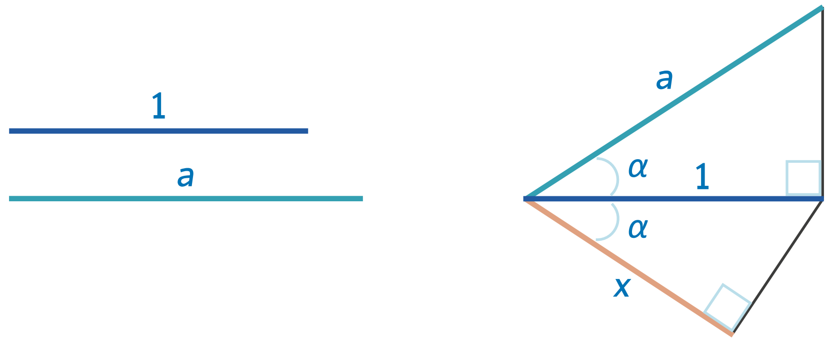


Пусть дан единичный отрезок, а также два отрезка с длинами a и b. Для определенности будем считать, что $a < 1 < b$.

1. Построим прямоугольный треугольник с катетами 1 и b.
2. Отложим от прямого угла на катете длины 1 отрезок длины a.
3. Через конец отрезка проведем прямую, параллельную гипотенузе исходного прямоугольного треугольника. Эта прямая отсекает на катете длины b отрезок длиной ab.

Действительно, по теореме о пропорциональных отрезках получаем: $b : 1 = x : a \quad \Rightarrow \quad x = ab$.

ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОГО



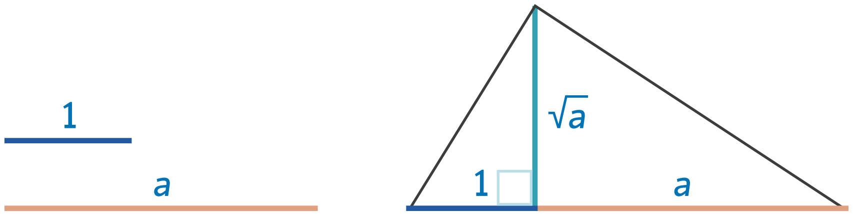
Пусть дан единичный отрезок и отрезок длины a. Построим отрезок длины $\frac{1}{a}$.

1. Построим прямоугольный треугольник с катетом 1 и гипотенузой a.
2. Отложим по другую сторону этого катета угол, равный углу между этим катетом и гипотенузой.
3. Построим прямоугольный треугольник по этому острому углу и гипотенузе, в качестве которой возьмем этот катет.
4. Тогда катет построенного треугольника, прилежащий этому углу, будет иметь длину $\frac{1}{a}$.

Действительно, наш прямоугольный треугольник будет подобен исходному, т.к. имеет такие же углы. Его катет x может быть найден из пропорции:

$$x : 1 = 1 : a \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{a}.$$

3 ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ



Пусть даны единичный отрезок и отрезок длины a. Построим отрезок длины $\sqrt{a}$.

1. Отложим на одной прямой отрезки 1 и a.
2. Построим окружность на получившемся отрезке $1 + a$ как на диаметре.
3. Восставим перпендикуляр из общей точки отрезков 1 и a до пересечения с окружностью. Тогда длина этого перпендикуляра будет равна $\sqrt{a}$.

Это также следует из подобия. Полученная точка окружности есть вершина прямого угла, опирающегося на диаметр. Этот прямоугольный треугольник разбивается перпендикуляром (обозначим его длину за x) на два прямоугольных треугольника, подобных ему и друг другу. Если записать соотношение подобия для этих двух треугольников, получим:

$$1 : x = x : a \quad \Rightarrow \quad x^2 = a \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{a}.$$

Таким образом любое число, полученное на квадратичном калькуляторе, мы можем построить с помощью циркуля и линейки на координатной плоскости.