1 ИГРА «ПЯТНАШКИ»

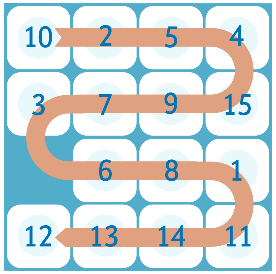
Пятнадцать фишек размещены в квадратной коробочке 4х4 (одно место остается пустым). Фишки могут перемещаться, но не могут выниматься.

В конце 19-го века некий Чарльз Певи, зубной врач из Америки, предложил огромную сумму за решение следующей задачи:

Все фишки находятся в правильном порядке, и только фишки 14 и 15 переставлены, как показано на рисунке. Требуется последовательно передвигая фишки, восстановить правильный порядок.

Задачу так никто и не решил… А Чарльз Певи запатентовал свою игру и заработал на ее продаже сумму гораздо большую, чем обещанный гонорар!

Сейчас мы, используя наши знания о перестановках, докажем, что это **невозможно**.



Каждому расположению фишек мы сопоставим перестановку 15 элементов, упорядочив номера фишек змейкой, игнорируя пропуск:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 10 & 2 & 5 & 4 & 15 & 9 & 7 & 3 & 6 & 8 & 1 & 11 & 14 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Доказательство основано на утверждении, что любое передвигание фишек не меняет четности перестановки. А перестановка из задачи и та, которую нужно получить, имеют разную четность, т.к. различаются на одну инверсию.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 14 & 15 & 13 \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix} = (14\ 15) \circ \sigma$$

УТВЕРЖДЕНИЕ ОБ ИГРЕ «ПЯТНАШКИ»

УТВЕРЖДЕНИЕ

При любом передвигании фишек (разрешенном в игре) четность перестановки не меняется.

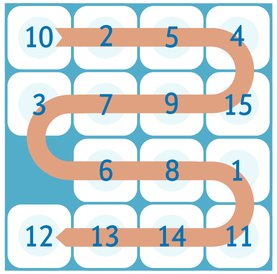
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Введем классификацию движений фишек:

- Вправо-влево;
- Вверх-вниз.

Можно заметить, что при движении вправо-влево не меняется порядок фишек, а значит, и четность не меняется.

При движении вверх-вниз тоже может не меняться порядок, если сдвигаемые фишки стоят рядом в «змейке».



Например, в нашем примере сдвиг 3 вниз не меняет перестановку.

Рассмотрим сдвиг 12 вверх. Он соответствует новой перестановке:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 10 & 2 & 5 & 4 & 15 & 9 & 7 & 3 & 6 & 8 & 1 & 11 & 14 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 10 & 2 & 5 & 4 & 15 & 9 & 7 & 3 & 12 & 6 & 8 & 1 & 11 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

Нам важно понять, как при этом изменилась четность. А четность - это четность числа инверсий.

Заметим, что в парах, где нет числа 12, ничего не изменилось.

В парах, состоящих из 12 и любого из чисел левее 12, ничего не изменилось. Во всех парах, состоящих из 12 и любого из чисел правее 3, свойство «быть или не быть инверсией» поменялось на противоположное. Всего таких пар 6, так что в результате четность не поменялась.

Таким образом, через сколько элементов будет прыгать число, на столько единиц будет меняться четность перестановки. Можно убедиться, что любой сдвиг фишки вверх-вниз соответствует прыжку через четное число элементов.

Отсюда заключаем, что любой прыжок сохраняет четность перестановки.

УТВЕРЖДЕНИЕ ДОКАЗАНО.

На протяжении нашего курса мы уже трижды столкнулись с глубоко не тривиальными вещами:

- Классификация движений прямой и окружности;
- Основная теорема арифметики;
- Сегодняшнее утверждение о игре «15».

Мы использовали один из универсальных способов доказательства теорем современной математики:

Если в системе существует **инвариант** (то, что не меняется в результате любых разрешенных действий), и есть задача привести систему из одной позиции в другую, с другим значением этого инварианта, то эта задача не разрешима.

В данном случае инвариант – это четность перестановки, соответствующей расстановке фишек в игре «15».

3 ПЕРЕСТАНОВКИ НА СЛУЖБЕ АЛГЕБРЫ

ПРОБЛЕМА

Математиков с древних времен занимал поиск формулы для корней полинома (многочлена) n-й степени. Квадратные уравнения умели решать еще до нашей эры, частные случаи кубических и более высоких порядков — тоже.
Самая общая формула для корней полинома третьей степени

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

была выведена Кардано (и независимо от него Тарталья) в 16-м веке.
К 16-17-м векам относится полная победа над полиномами

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$$

Формулы для корней полиномов 3-й и 4-й степени очень громоздкие, но они существуют.

Долгое время никому не удавалось ни вывести формулу для корней полинома 5-й степени, ни доказать, что вывести ее невозможно.

Только в 19-м веке, благодаря появлению и развитию теории групп Абелем и Галуа, удалось, наконец, доказать следующий факт:

ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

Уравнение

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

не разрешимо в радикалах при $n \geqslant 5$
(его решения не могут быть выписаны через корни целых степеней и арифметические действия).

Именно на основе изучения перестановок Галуа построил свою теорию многочленов. Ключевую роль здесь сыграли группы S_4 и S_5, детальный анализ которых позволил понять, почему корни полинома 4-й степени могут быть найдены в радикалах, а более старших степеней — нет. Группу S_4 мы подробно изучим на следующих уроках.

На рубеже 18-го и 19-го веков математика стала настоящей наукой, потому что она научилась доказывать подобные серьезные факты с привлечением специально разработанной абстрактной теории. Это безусловно исторический прорыв.