1 ШУТНИК В ГАРДЕРОБЕ

ЗАДАЧА

В гардеробе театра на всех вешалках висят пальто. Приходит шутник, сбрасывает все пальто, а затем развешивает их в случайном порядке.

ВОПРОС:

Какова вероятность того, что чье-нибудь пальто окажется на своем месте?

Эту задачу мы научимся решать позже, а пока построим математическую модель этой ситуации.

Все возможные исходы — произвольный порядок следования номеров от 1 до n — это перестановки чисел от 1 до n.

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots n \\ 3\ n\ 1 \ldots 8 \end{pmatrix}$$

Пример перестановки

ВОПРОС:

Сколько всего существует таких исходов?

СЛУЧАИ $n = 2$ И $n = 3$

При $n = 2$ существует $2\ (= 2 \cdot 1)$ перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1\ 2 \\ 1\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1\ 2 \\ 2\ 1 \end{pmatrix}$$

При $n = 3$ существует $6\ (= 3 \cdot 2 \cdot 1)$ перестановок:

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 2\ 1\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 3\ 2\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 3\ 1\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 3\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 2\ 3\ 1 \end{pmatrix}$$

ГИПОТЕЗА:

Всего существует $n!$ («n факториал») различных перестановок чисел от 1 до n, где $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ:

Утверждение верно для любого n, если из того, что оно верно для n следует, что оно верно для $n + 1$.

Переход от $n = 3$ к $n = 4$:
4-е пальто мы можем повесить 4-мя способами, и на каждый из этих способов у нас есть 6 способов как развесить остальные 3 по 3-м оставшимся вешалкам. Итого:

$$4 \cdot 6 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

2 ПЕРЕХОД ОТ n К $n + 1$

Пусть мы установили, что существует ровно $n!$ перестановок для n чисел

Докажем, что тогда для $n + 1$ чисел существует $(n + 1)!$ перестановок

Мы можем выбрать для $(n + 1)$-го пальто вешалку $n + 1$ способами и для каждого из этих способов у нас есть $n!$ способов развесить остальные n пальто.
Итого получаем $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ способов.

Возвращаясь к задаче о шутнике в гардеробе, мы можем заметить, что при $n = 3$ в 4-х случаях из 6-ти найдется пальто, оставшееся на месте. Чтобы понять закономерность, нужно рассмотреть $n = 4, 5$ и т.д., но при $n = 5$ уже придется анализировать $5! = 120$ исходов.

Пока мы эту задачу отложим и будем изучать **отображения**, которые связаны с **перестановками**.

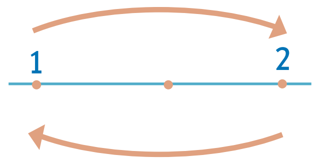
АНАЛОГИЯ С ДВИЖЕНИЯМИ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

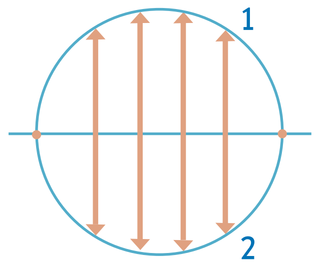
Перестановку можно рассматривать как отображение **конечного множества** из n элементов на само себя.

На уроках 5-10 мы изучали движения прямой и окружности. Это были отображения **бесконечного множества** точек на само себя.

Некоторые движения можно задать перестановкой конечного числа элементов.

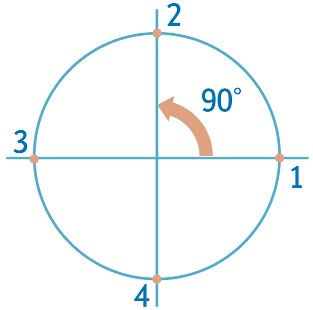
Отражение на прямой и окружности можно задать перестановкой из двух элементов.





$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Поворот окружности на 90° можно задать перестановкой из 4-х элементов:



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$