1 КЛЮЧЕВОЙ МОМЕНТ: РЕШИТЬ $ax + by = 1$

Вспомним алгоритм решения $ax + by = c$ в целых числах:

$c \vdots$ НОД (a, b) ? → **НЕТ** $\Rightarrow$ решений нет

↓

ДА $\Rightarrow$ делим уравнение на НОД (a, b), получаем:

$$\tilde{a}x + \tilde{b}y = \tilde{c}$$

При этом НОД $(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$. Значит, существуют такие x_0, y_0, что

$$\tilde{a}x_0 + \tilde{b}y_0 = \tilde{c}$$

Предположим, что мы нашли такую пару (x_0, y_0).
Но тогда пара $(\tilde{c}x_0, \tilde{c}y_0)$ будет одним из решений (частным решением) уравнения

$$\tilde{a}x + \tilde{b}y = \tilde{c}$$

А, значит, и исходного уравнения

$$ax + by = c$$

Общим решением в целых числах уравнения

$$ax + by = c$$

будет сумма этого частного решения $(\tilde{c}x_0, \tilde{c}y_0)$ и общего решения в целых числах однородного уравнения

$$ax + by = 0$$

Таким образом, ключевым моментом является отыскание пары (x_0, y_0) — частного решения уравнения

$$\tilde{a}x + \tilde{b}y = 1$$

На конкретном примере мы проделаем это тремя способами:

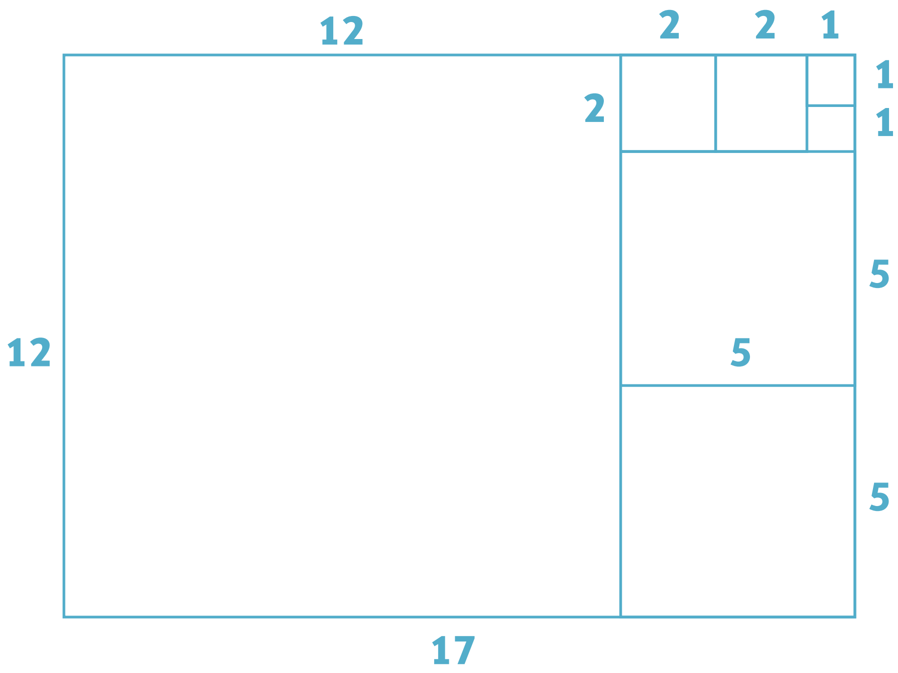
1. Геометрический алгоритм Евклида
2. Арифметический алгоритм Евклида
3. Метод цепных дробей

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

2 ПРИМЕР: $17x + 12y = 1$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

- Изобразим прямоугольник со сторонами 17 и 12.
- Отмерим по длинной стороне 12 один раз. Рассмотрим оставшийся прямоугольник.
- Отмерим квадрат со стороной 5. У нас поместится 2 таких квадрата и останется прямоугольник 5×2.
- Отмерим теперь два квадрата со стороной 2.
- И, наконец, оставшийся прямоугольник поделится нацело на два квадрата 1×1.



АРИФМЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

Делим с остатком 17 на 12, потом 12 на полученный остаток и т.д. Алгоритм завершится делением нацело и нахождением НОД (17, 12) = 1:

$$17 = 12 \cdot \mathbf{1} + 5$$
$$12 = 5 \cdot \mathbf{2} + 2$$
$$5 = 2 \cdot \mathbf{2} + 1$$
$$2 = 1 \cdot \mathbf{2}$$

Обратим внимание на неполные частные, которые возникали на каждом шаге (выделены жирным).

Они соответствуют количеству квадратов соответствующих размеров при разбиении прямоугольника $17 \cdot 12$ в геометрическом алгоритме Евклида.

Чтобы найти пару (x_0, y_0), выражаем обратным ходом по алгоритму Евклида $\text{НОД}(17, 12) = 1$ через 17 и 12:

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 = 5 \cdot 1 - (12 - 5 \cdot 2) \cdot 2 = \\ &= 5 \cdot 1 - 12 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = -\,12 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = \\ &= -12 \cdot 2 + (17 - 12 \cdot 1) \cdot 5 = \\ &= 17 \cdot 5 + 12 \cdot (-7), \end{aligned}$$

откуда $x_0 = 5$, $y_0 = -7$.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

3 МЕТОД ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

1 Запишем отношение 17 : 12 в виде дроби $\frac{17}{12}$ и отделим целую часть: $\frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12}$

2 Дробь $\frac{5}{12}$ запишем в виде $\frac{1}{\frac{12}{5}}$ и отделим целую часть от $\frac{12}{5}$

$$\frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}}$$

Продолжаем процесс, пока последняя дробь

в разложении на будет иметь вид $\frac{1}{n}$:

$$\frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cancel{\frac{1}{2}}}}$$

цепная дробь

3 Отбрасываем $\frac{1}{2}$ в разложении и сворачиваем цепную дробь без последнего «этажа» в обыкновенную. Получим:

$$\frac{17}{12} \approx \frac{7}{5}$$

4 Умножаем перекрестно: 17 на 5 и 12 на 7 и замечаем, что $17 \cdot 5 + 12 \cdot (-7) = 85 - 84 = 1$.
Мы получили то же решение:
$x_0 = 5,\ y_0 = -7$.

17	7
12	5

Обратим внимание на числа в нашей цепной дроби: они полностью повторяют неполные частные в алгоритме Евклида.

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

ПРИМЕР 2

Найдем такие (x_0, y_0), что $5x_0 - 9y_0 = 1$ методом цепных дробей:

1 Запишем отношение 9 : 5 в виде дроби и отделим целую часть:

$$\frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}$$

2 Дробь $\frac{1}{4}$ запишем в виде $\frac{1}{\frac{5}{4}}$ и отделим целую часть от $\frac{5}{4}$:

$$\frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5} = 1 + \frac{1}{1 + \cancel{\frac{1}{4}}}$$

3 Отбрасываем $\frac{1}{4}$ в разложении и находим, что

$$\frac{9}{5} \approx 1 + \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{9}{5} \approx \frac{2}{1}$$

9	5
2	1

4 Умножаем перекрестно: 9 на 1 и 5 на 2 и замечаем, что $5 \cdot \mathbf{2} - 9 \cdot \mathbf{1} = 10 - 9 = 1$.
Мы получили решение: $x_0 = 2,\ y_0 = 1$.

Можно было использовать более короткое разложение $\frac{9}{5}$ в цепную дробь, через знак «–»:

$$\frac{9}{5} = 2 - \frac{1}{5}$$

Отбрасывая $\frac{1}{5}$, получим то же самое приближение для $\frac{9}{5}$, но быстрее на один шаг.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

ПРИМЕР 3

$18x + 11y = 1$

1 Запишем отношение $18 : 11$ в виде дроби и отделим целую часть:

$$\frac{18}{11} = 1 + \frac{7}{11}$$

2 Дробь $\frac{7}{11}$ запишем в виде $\cfrac{7}{\cfrac{11}{7}}$ и отделим целую часть от $\frac{11}{7}$ и т.д.

Завершим разложение, снова используя знак «–»:

$$\frac{18}{11} = 1 + \frac{7}{11} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{7}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 - \cancel{\frac{1}{4}}}}$$

3 Отбрасываем $\frac{1}{4}$ в разложении и находим, что

$$\frac{18}{11} \approx \frac{5}{3}$$

4 Умножаем перекрестно:
18 на 3 и 5 на 11

$$\begin{matrix} 18 & & 5 \\ & \times & \\ 11 & & 3 \end{matrix}$$

и замечаем, что $18 \cdot (-\mathbf{3}) + 11 \cdot \mathbf{5} = 1$.
Мы получили решение: $x_0 = -3$, $y_0 = 5$.

ФЕНОМЕН ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Рассмотрим произвольную цепную дробь:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$$

здесь a_0, a_1, a_2, a_3 — произвольные целые числа.

Отбросим $\frac{1}{a_3}$ — последний «этаж» в этой дроби.
Оставшуюся дробь свернем в обыкновенную:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{a_1 a_2 + 1}{a_2}} = \frac{a_0 (a_1 a_2 + 1) + a_2}{a_1 a_2 + 1}$$

Исходную дробь тоже можем свернуть в обыкновенную и получим в числителе и знаменателе некоторые **многочлены** с участием a_0, a_1, a_2, a_3

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = \frac{\Phi (a_0, a_1, a_2, a_3)}{\Psi (a_0, a_1, a_2, a_3)}$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ЦЕПНЫХ ДРОБЯХ

Для произвольной цепной дроби и для дроби, полученной из нее отсеканием последнего «этажа», выполнено:

$$A \cdot \Psi - B \cdot \Phi = \pm 1$$

где $\dfrac{A}{B} = \dfrac{a_0 (a_1 a_2 + 1) + a_2}{a_1 a_2 + 1}$ — дробь после отсекания.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

Эта теорема — ключевой момент в использовании цепных дробей в приближении иррациональных чисел рациональными.

Пока мы используем ее без доказательства, но на дальнейших уроках обязательно вернемся к изучению темы цепных дробей.

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ И ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Числа Фибоначчи — это бесконечная последовательность целых чисел, которая начинается с двух единиц, а каждое последующее число является суммой двух предыдущих:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Рассмотрим бесконечную цепную дробь:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}$$

Данная бесконечная цепная дробь имеет в математике важное значение, так как равна вещественному числу, которое называется золотым сечением.
Про него мы обязательно будем еще говорить в наших уроках.

Удивительный факт связи этой дроби с числами Фибоначчи состоит в следующем:

Если отсекать последовательно ее «хвост» все дальше и дальше, на каждом шаге мы будем получать дроби, образованные двумя последовательными числами Фибоначчи:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$$