

# 1 ЛЕТОИСЧИСЛЕНИЕ И ВРЕМЯ

## ПРИМЕР 1: ЛЕТОИСЧИСЛЕНИЕ

### ВМЕСТО ГОВОРИМ

1973 г.  73-й год рождения

1917 г.  17-й год

2017 г.

Такая операция математически называется **взятие числа по модулю 100** (взятие остатка от деления числа на 100):

$$1973 : 100 = 19,73 \rightarrow 73$$

## ПРИМЕР 2: ВРЕМЯ И СУТКИ

а) Сейчас 18 ч. Сколько времени будет через 7 ч?

### ВМЕСТО ГОВОРИМ

$$18 \text{ ч} + 7 \text{ ч} = 25 \text{ ч}$$

$$18 \text{ ч} \oplus 7 \text{ ч} = 1 \text{ ч}$$

б) Поезд выехал из Москвы в 9 ч. Каково будет московское время, когда через 20 ч он прибудет в Ростов на Дону?

### ВМЕСТО ГОВОРИМ

$$9 \text{ ч} + 20 \text{ ч} = 29 \text{ ч}$$

$$9 \text{ ч} \oplus 20 \text{ ч} = 5 \text{ ч}$$

**Сложение часов — это арифметика остатков по модулю 24.**

Операция  $\oplus$  в этой арифметике означает, что мы складываем часы и берем сумму **по модулю 24** (берем от суммы остаток от деления на 24).

**Эта операция не выводит нас за пределы 24 чисел, поэтому сложение часов есть конечная арифметика.**

## ПРИМЕР 3: АНГЛИЙСКАЯ СИСТЕМА ВРЕМЕНИ

a.m. до полудня (лат. ante meridiem)

p.m. после полудня (лат. post meridiem)

$$10 \text{ ч} \oplus 4 \text{ ч} = 2 \text{ ч (p.m.)}$$

Операция  $\oplus$  в этой арифметике означает, что мы складываем часы и берем сумму **по модулю 12** (берем от суммы остаток от деления на 12).

## ЭЛЕКТРОННЫЕ ЧАСЫ МЕХАНИЧЕСКИЕ



арифметика остатков по модулю 24



арифметика остатков по модулю 12

## ПОСТРОЕНИЕ АККОРДОВ

Октава состоит из 12 полутонов:

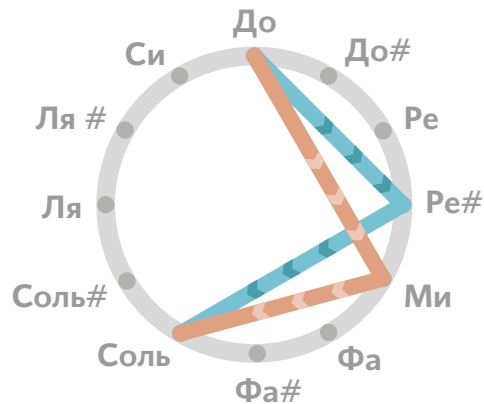
До, До#, Ре, Ре#, Ми, Фа, Фа#, Соль, Соль#, Ля, Ля#, Си, До

**МАЖОРНОЕ ТРЕЗВУЧИЕ:**

**МИНОРНОЕ ТРЕЗВУЧИЕ:**

Нота + 4 полутона + 3 полутона;

Нота + 3 полутона + 4 полутона.



Все 12 мажорных аккордов получаются поворотом красной фигуры на угол  $\pi/6 = 30^\circ$  (1/12-ю часть окружности)

Все 12 минорных аккордов получаются поворотом синей фигуры на этот же угол

Построение аккордов происходит в **конечной арифметике остатков по модулю 12:**

$$\text{ЛЯ} \oplus_3^{12} \text{ полутона} = \text{ДО (следующей октавы)}$$

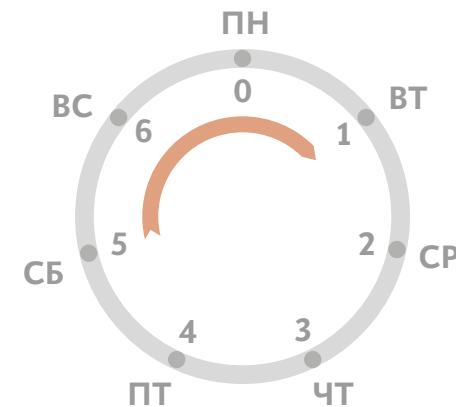
ДО 1-й октавы и ДО 2-й октавы сравнимы между собой по модулю 12. Их частоты различаются в 2 раза.

## ДНИ НЕДЕЛИ

Дни недели представляют собой конечную арифметику остатков по модулю 7

$$\text{среда} \oplus_7^7 5 = \text{понедельник}$$

$$\text{суббота} \oplus_7^7 3 = \text{вторник}$$



В арифметике дней недели  $7 \oplus_7^7 0$ , поэтому

$$\text{понедельник} \oplus_7^7 7 = \text{понедельник}$$

## 3 ЗАДАЧА 1

Сегодня среда, 13 декабря.  
Каким днем недели будет 13 декабря следующего года?

### РЕШЕНИЕ

В обычном году 365 дней.  
Остаток от деления 365  
на 7 равен 1, значит,  
в арифметике по модулю 7

$$365 \equiv 1$$

Если следующий год —  
обычный, то:

$$CP \oplus 365 = CP \oplus 1 = \text{ЧТ}$$

В високосном году 366 дней.  
Остаток от деления 366  
на 7 равен 2, значит,  
в арифметике по модулю 7

$$366 \equiv 2$$

Если следующий год —  
високосный, то:

$$CP \oplus 366 = CP \oplus 2 = \text{ПТ}$$

## ЗАДАЧА 2

В 2017-м году 13 декабря было средой.  
В каком году 13 декабря снова будет средой?

### РЕШЕНИЕ

Ответ зависит от расположения года, про который задан  
вопрос, относительно високосных годов:

через 6 лет\*

через 5 лет\*\*

через 11 лет\*\*\*

\*если в этот  
период попал  
1 високосный год;

\*\*если в этот  
период попало  
2 високосных года;

\*\*\*если в этот  
период попало  
3 високосных года;

**Цикл наступления того же дня недели через  
6 – 5 – 6 – 11 лет повторяется снова и снова,  
потому что он равен 28 годам, что кратно  
количеству дней недели и циклу високосных лет.**

Через  $28 = 4 \cdot 7$  лет день недели заведомо будет тем же.

## 4 АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ

ТАБЛИЦА СЛОЖЕНИЯ ПО МОДУЛЮ 7

$\begin{matrix} 7 \\ \oplus \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

### В конечной арифметике остатков по модулю 7

только 7 чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Сложение  $\oplus$  в этой арифметике означает, что мы складываем числа и берем остаток от деления полученной суммы на 7:

$$5 \oplus 4 = 2$$

ВАРИАНТЫ ОБОЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАЦИЙ ПО МОДУЛЮ

$$6 \overset{7}{\oplus} 3$$

$$(6+3) \bmod 7$$

$$(6+3)(7)$$

### ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА В АРИФМЕТИКЕ ОСТАТКОВ

Чтобы найти, какому остатку соответствует отрицательное число, берем ближайшее слева от этого числа кратное модулю и находим их разницу:



$$-2 = 7 + 5 \Rightarrow -2 = 5 \bmod 7 \quad \text{—2 сравнимо с 5 по модулю 7}$$

$$-3 = -10 + 7 \Rightarrow -3 = 7 \bmod 10 \quad \text{—3 сравнимо с 7 по модулю 10}$$

ТАБЛИЦА СЛОЖЕНИЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ЧИСЕЛ

$\begin{matrix} 2 \\ \oplus \end{matrix}$	Ч	Н
Ч	Ч	Н
Н	Н	Ч

Сложение четных и нечетных чисел есть **конечная арифметика остатков по модулю 2**.