

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РЯД

ТЕОРЕМА

Часть 1: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

Это общее утверждение, которое при подстановке $x = 1$ даст нам значение числа e .

СЛЕДСТВИЕ: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

Вычисляя частичные суммы ряда, можно получить любое приближение для числа $e \approx 2,71828\dots$

ТЕОРЕМА

Часть 2: $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЧАСТИ 1

Возьмем производную от правой части выражения, которое собираемся доказать.

Очевидно, что производная от константы равна нулю, т.к. функция не имеет приращения: $f(x) \equiv c \Rightarrow f'(x) \equiv 0$.

Нам потребуется производная от функции $f(x) = x^n$. Запишем по определению производной:

$$(x^n)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \varepsilon)^n - x^n}{\varepsilon}.$$

Вспомним формулу бинома Ньютона:

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + y^n.$$

В нашем случае $y = \varepsilon$.

$$(x^n)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\varepsilon + \varepsilon + \dots - x^n}{\varepsilon}.$$

На месте многоточия стоят слагаемые, содержащие ε^k , где $k \geq 2$. При делении на ε и переходе к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ они обращаются в 0. Таким образом,

$$(x^n)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\varepsilon + \varepsilon + \dots - x^n}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} nx^{n-1} = nx^{n-1}.$$

В частности получаем, что $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$ и т.д.

При подстановке в наш ряд получаем:

$$\begin{aligned} (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots)' &= \\ &= 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots = \\ (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots) & \end{aligned}$$

В итоге мы получили, что производная от ряда равна ему самому.

Если бы мы знали теорему о единственности решения дифференциального уравнения, мы бы уже могли сказать, что данный ряд и есть такая функция, что $f' = f$ и $f(1) = e$, т.е. совпадает с e^x . Но нам придется дополнительно установить, что данный ряд является экспоненциальной функцией, т.е. удовлетворяет условию $f(x + y) = f(x)f(y)$.

РЯД ЯВЛЯЕТСЯ ЭКСПОНЕНТОЙ

Рассмотрим произведение

$$f(x)f(y) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \times \\ \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right).$$

При перемножении одной скобки на другую у нас возникнут слагаемые, содержащие разные степени x и y . Сгруппируем их так, чтобы в каждой группе сумма степеней x и y у всех слагаемых была одинакова:

$$f(x)f(y) = 1 + (x + y) + \left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!}\right) + \\ + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!}y + \frac{y^2}{2!}x + \frac{y^3}{3!}\right) + \dots = \\ = 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \\ + \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + \dots$$

В каждой скобке получается не что иное как биномиальное разложение для $(x + y)^n$.

Таким образом, мы установили, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

1-я часть теоремы доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО $f' = f$ ДЛЯ ПРЕДЕЛА

Докажем теперь 2-ю часть теоремы:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Сначала установим, что производная предела равна ему самому. Воспользуемся без доказательства тем, что в случае непрерывной дифференцируемой функции можно внести операцию взятия производной под знак предела, а также правилом взятия производной сложной функции:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)' = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}.$$

Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1$, можем домножить на это выражение и, переходя к пределу произведения, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Таким образом, производная от нашего предела равна ему самому.

РАВЕНСТВО РЯДА И ПРЕДЕЛА

Установим теперь, что рассматриваемый нами предел равен экспоненциальному ряду.

Рассмотрим для $\forall n$ выражение под знаком предела и распишем его по формуле бинома Ньютона:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + n \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{x^3}{n^3} + \dots + \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{n!} \frac{x^n}{n^n} = \\
&= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x^2}{2!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{x^3}{3!} + \dots + \\
&\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Для простоты будем считать, что $x > 0$.

Полученное нами выражение для n будет меньше, чем e^x . Нам нужно доказать, что при $n \rightarrow \infty$ оно равно e^x . Для этого нужно отрезать какой-нибудь фиксированный кусок этой формулы и заметить, что чем больше этот фиксированный кусок, тем ближе соответствующий кусок экспоненты (экспоненциального ряда) к ней самой.

То есть при фиксированном k и при $n \rightarrow \infty$ в выражении

$$1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x^2}{2!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{x^k}{k!}$$

все скобочки стремятся к 1, а значит, оно при достаточно больших n отличается от $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}$ не более, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, а $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}$, в свою очередь, отличается не более, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$ от e^x .

Таким образом, начиная с некоторого n

$$\left|e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| < \varepsilon, \text{ а значит, } e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

В принципе 2-я часть теоремы полностью доказана, но мы все же на следующем уроке дополнительно докажем, что $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ удовлетворяет условию $f(x+y) = f(x)f(y)$.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ЛЕММА

ТЕОРЕМА

Пусть последовательность c_n чисел из $\mathbb{R}$ (или из $\mathbb{C}$) ограничена ($\exists R \in \mathbb{R} : |c_n| < R \forall n$).

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Распишем по формуле бинома Ньютона:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{n^2} c_n + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{c_n^2}{n^4} + \dots \\
&\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{c_n^k}{n^{2k}} + \dots = \\
&= 1 + \frac{c_n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} \frac{c_n^2}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{c_n^k}{n^k} + \dots < \\
&< 1 + \frac{c_n}{n} + \frac{c_n^2}{2!n^2} + \dots + \frac{c_n^k}{k!n^k} + \dots
\end{aligned}$$

Получаем, что каждый член суммы есть произведение члена ограниченной последовательности и члена последовательности, стремящейся к нулю. А значит, при $n \rightarrow \infty$ это выражение сходится к 1. Лемма доказана.

На следующем, 100-м, уроке мы используем эту лемму для доказательства свойства экспоненты для $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, а также распространим наши выводы на комплексную, и даже матричную экспоненту и, в заключении курса, докажем замечательную формулу Эйлера.