

# ПОСТРОЕНИЕ ЭКСПОНЕНТЫ

## АДДИТИВНАЯ ФУНКЦИЯ

### ЗАДАЧА 1

Пусть есть уравнение на функцию  $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ ,  $f$  — непрерывная функция. Нужно найти все такие функции.

Далеко не все функции удовлетворяют данному условию. Например,  $f = c = \text{const} \neq 0$ . Получаем  $c \neq c + c$ . Для  $f(x) = x^2$  получаем  $(x + y)^2 \neq x^2 + y^2$ .

Заметим, что  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ . Обозначим  $f(1) = a$  и попробуем выразить через  $a$  все остальные значения. Получим  $f(2) = f(1) + f(1) = 2a$ . Значит,  $\forall n \in \mathbb{N} f(n) = na$ .

Догадка:  $f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Докажем это.

Для натуральных чисел очевидно, что  $f(n) = na$ .  $0 = f(0) = f(n - n) = f(n) + f(-n)$ , откуда следует, что  $f(-n) = -na$ . Теперь мы знаем, что график совпадает с графиком линейной функции во всех целочисленных точках. Что будет в рациональных точках?

$$ma = f(m) = f\left(\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n}\right) = nf\left(\frac{m}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}a.$$

Т.е. для дробей тоже выполнено  $f(x) = ax$ .

Требование непрерывности функции  $f$  приводит к тому, что  $f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Например, если бы в точке  $x = \sqrt{2}$

$f(\sqrt{2}) \neq a\sqrt{2}$ , то функция дала бы скачок в этой точке.

Таким образом, уравнению  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  удовлетворяет любая линейная функция вида  $f(x) = ax$ .

Заметим, что  $f$  — гомоморфизм  $f: \langle \mathbb{R}, + \rangle \rightarrow \langle \mathbb{R}, + \rangle$ , т.е. все такие гомоморфизмы являются линейными функциями.

## ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Теперь будем искать гомоморфизмы  $f: \langle \mathbb{R}, + \rangle \rightarrow \langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$ .

### ЗАДАЧА 2

Пусть есть уравнение на функцию  $f(x + y) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ ,  $f$  — непрерывная функция. Нужно найти все такие функции.

Пусть  $f(\alpha) = 0$ .

Тогда  $\forall x f(\alpha + x - \alpha) = f(\alpha)f(x - \alpha) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ .

Следовательно, если  $f$  обращается в 0 хотя бы в одной точке,  $f$  тождественно равна нулю. Далее считаем, что  $f \not\equiv 0$ .

Пусть  $f(0) = f(0 + 0) = f(0)f(0) \Rightarrow f(0) = 1$ .

Заметим, что  $\forall x \in \mathbb{R} f(x) > 0$ . Действительно:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0 \text{ всегда.}$$

Пусть  $f(1) = a, a > 0$ . Тогда

$$f(2) = f(1 + 1) = a^2, f(3) = f(2 + 1) = a^3, \dots \Rightarrow \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a^n, \text{ а также, } f(-n) = \frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

$$f(m) = f\left(\frac{m}{n} \cdot n\right) = f\left(\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n}\right) = \left(f\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n \\ \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{f(m)} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Итак,  $\forall x \in \mathbb{Q} \quad f(x) = a^x$ .

Будет ли эта функция непрерывной?

Заметим, что она монотонна.

$$f\left(\frac{m}{n} + \frac{1}{100}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right)f\left(\frac{1}{100}\right) = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{1}{100}}$$

При увеличении на незначительную величину  $\frac{1}{100}$  наша функция изменяется на число, все более близкое к 1.

То есть для всех рациональных точек  $f$  непрерывна.

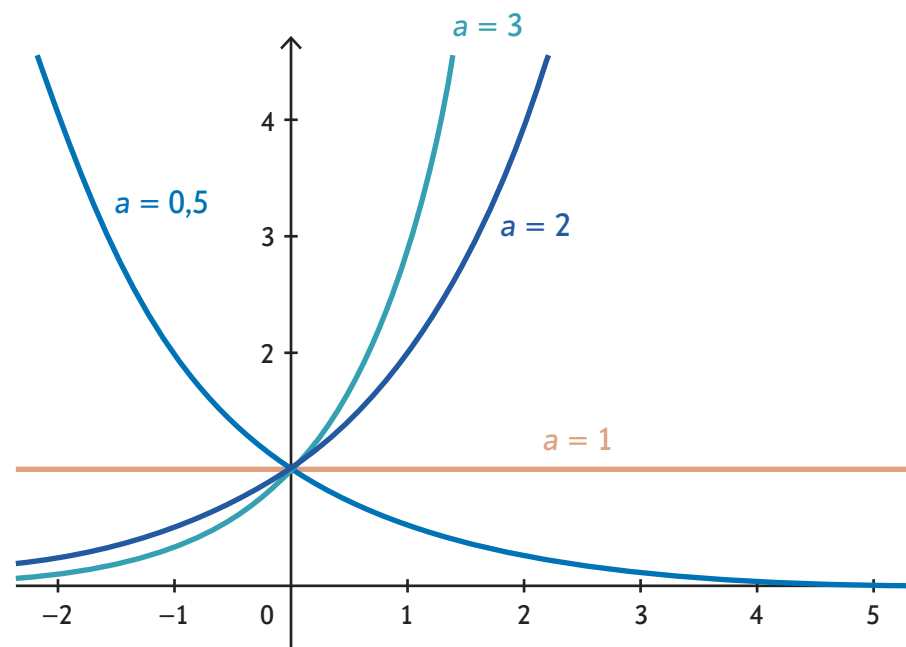
По предельному переходу переносим функцию на все вещественные числа:  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a^x$ . Такая функция называется **экспонентой** (показательной функцией).

Если  $f \not\equiv 0$  удовлетворяет условию  $f(x + y) = f(x)f(y)$ , то существует  $a > 0$  такое, что  $f(x) = a^x$ .

## НАКЛОН ГРАФИКА ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНАЯ

Зафиксируем  $f(1) = a$ ,  $a > 0$ . Тогда  $f(x) = a^x$ .

Графики функции  $f$  при  $a > 1$ ,  $a = 1$  и  $a < 1$  показаны на рисунке:



Выясним наклон экспоненциальной функции в точке  $y$ .

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при приращении аргумента, стремящемся к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}.$$

Производная показывает скорость изменения значения функции.

Запишем выражение для тангенса угла наклона касательной — отношение приращения функции к приращению аргумента в точке  $y$  на некоторое  $\varepsilon > 0$  с учетом свойства экспоненты:

3

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(y + \varepsilon) - f(y)}{\varepsilon} = \frac{f(y)f(\varepsilon) - f(y)}{\varepsilon} = f(y) \frac{(f(\varepsilon) - 1)}{\varepsilon}.$$

Здесь  $\frac{(f(\varepsilon) - 1)}{\varepsilon}$  — тангенс угла наклона касательной в точке  $y = 0$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  это выражение стремится к  $f'(0)$ .

Таким образом производная экспоненциальной функции в любой точке пропорциональна значению самой функции с коэффициентом пропорциональности  $f'(0)$ .

#### ВОПРОС:

А существует ли производная?

Достаточно доказать, что существует  $f'(0)$ .

Но мы не будем приводить доказательство в нашем курсе.

Итак, для функции  $f(x) = a^x$  мы получили дифференциальное уравнение  $f' \sim f$ . В самом простом случае это уравнение превращается в  $f' \equiv f$ . Что это означает геометрически?  
 $\operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$ .

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Такое число  $a$ , при котором угол наклона касательной к функции  $f(x) = a^x$  в точке  $x = 0$  равен  $45^\circ$ , называется числом  $e$ .

На следующих уроках мы будем изучать функцию  $f(x) = e^x$  и узнаем, чему равно число  $e$ .