

МОДЕЛИ МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

ЧЕТЫРЕ МОДЕЛИ МНОЖЕСТВА $\mathbb{R}$

На прошлом уроке мы определили вещественное число $\sqrt[k]{a}$ как точную верхнюю грань множества A , где $A = \{r \in \mathbb{Q}_+ : r^k < a\}$. Таким же образом можно задать, например, $\log_2 3 = \text{TBF}\{r \in \mathbb{Q} : 2^r < 3\}$. Но не к каждому вещественному числу можно обратиться, т.к. количество всех текстов счетно, а мощность $\mathbb{R}$ есть континуум.

Например, Дедекинд определил вещественные числа как некоторые подмножества $\mathbb{Q}$. Другой путь состоит в том, чтобы описать все аксиомы («правила игры»), которым удовлетворяют все действия с вещественными числами. Третий подход состоит в задании вещественного числа бесконечной десятичной дробью (или любой q -ичной дробью). Четвертой моделью $\mathbb{R}$ является множество всех фундаментальных последовательностей из $\mathbb{Q}$.

Все эти модели эквивалентны между собой.

Кратко пройдемся по этим подходам, обсудим их преимущества и недостатки.

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К $\mathbb{R}$

Существует три аспекта в аксиоматике множества вещественных чисел:

- арифметический;
- порядковый;
- непрерывный.

1-я группа аксиом ($\mathbb{R}$ — поле):

$\mathbb{R}$ — коммутативная группа относительно сложения.

$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ — коммутативная группа относительно умножения.

Распределительный (дистрибутивный) закон умножения относительно сложения.

2-я группа аксиом (упорядоченность $\mathbb{R}$):

- 1) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ либо $a < b$, либо $a = b$, либо $a > b$.
- 2) $a > b, b > c \Rightarrow a > c$ (транзитивность отношения порядка).
- 3) $a > b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c > b + c$.
- 4) $a > b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow ac > bc$ при $c > 0$ и $ac < bc$ при $c < 0$.

3-я группа аксиом (полнота $\mathbb{R}$):

Любая из эквивалентных формулировок аксиомы полноты.

На основе аксиом множества вещественных чисел докажем, что $1 > 0$.

Предположим, что $1 < 0$. Тогда $1 \cdot 1 > 0 \cdot 1$, т.е. при умножении на 1 должен меняться знак. Но отсюда следует, что $1 > 0$.

Получили противоречие! Значит, предположение неверно, и $1 > 0$.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Вещественным числом называется любая фундаментальная последовательность чисел из $\mathbb{Q}$.

Проблема этого подхода в том, что различные последовательности означают одно и то же число, например, $(0, 0, 0, \dots) = 0$ и $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) = 0$. Поэтому нужно уточнить определение словами «с точностью до эквивалентности»: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

Достоинства:

- 1) куда сходится последовательность, там и число;
- 2) понятно, как производить арифметические действия.

Недостаток: трудно задать порядок.

БЕСКОНЕЧНЫЕ q -ИЧНЫЕ ДРОБИ

Пусть $q > 1$ — целое число. Хотим сопоставить любой точке прямой конечную или бесконечную q -ичную дробь. И наоборот, каждой q -ичной дроби сопоставить некоторую точку прямой.

Берем любое число. Его целую часть раскладываем по степеням числа q и получаем соответствующие разряды: $1, q, q^2, q^3, \dots$. Что делать с дробной частью? Делим интервал $(0; 1)$ на q равных частей. Смотрим, в какую часть попадает дробная часть числа и ставим соответствующую цифру: $0, 1, 2, \dots, q-1$. Делим эту часть еще на q равных частей, получаем следующую цифру после запятой и так далее. Повторяя эту процедуру, получаем конечную или бесконечную q -ичную дробь.

По аксиоме полноты каждая такая последовательность дает некоторое число.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если есть q -ичная дробь с бесконечным хвостом из $q-1$, то это число обязано совпадать с числом, у которого последняя цифра перед этим бесконечным хвостом увеличена на 1, а дальше идут нули.

ПРИМЕР

Почему $0,999\dots$ в точности равно 1?
Потому что $0,999\dots = 9 \cdot 0,111\dots$, а $0,111\dots = \frac{1}{9}$,
и это равенство точное.

С такими бесконечными последовательностями можно осуществлять все действия: складывать, вычитать, умножать, делить, сравнивать. Мы получили еще одну модель вещественных чисел.

ДЕДЕКИНДОВЫ СЕЧЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Сечением Дедекинда называется подмножество $A \subset \mathbb{Q}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $A \neq \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$;
- 2) В A нет максимального элемента (такого, который больше всех остальных элементов A);
- 3) A ограничено сверху;
- 4) Если $q \in A$, $r < q$, то $r \in A$.

По сути это луч из всех рациональных чисел, меньших некоторого вещественного числа, направленный в $-\infty$.

ПРИМЕРЫ:

1) Если $s \in \mathbb{Q}$, то $A_s = \{r \in \mathbb{Q} : r < s\}$.

2) Пусть $a \in \mathbb{Q}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Тогда $A_{\sqrt[k]{a}} = \{r \in \mathbb{Q} : \text{либо } r < 0, \text{ либо } r > 0 \text{ и } r^k < a\}$.

ОПЕРАЦИИ С ДЕДЕКИНДОВЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

Пусть $A, B \in \mathbb{R}$ — дедекиндовы сечения.

Определим их сумму:

$$A \oplus B = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{k}{l}, \frac{m}{n} \in A, \frac{k}{l} \in B \right\}.$$

Это сумма по Минковскому двух подмножеств (каждый элемент одного суммируется с каждым элементом другого). Аналогично задается произведение двух подмножеств.

Разность $A - B = \{a - b, a \in A, b \notin B\}$.

Чтобы определить умножение, нужно рассмотреть много случаев. В случае $A, B > 0$ $A \cdot B = (-\infty; 0] \cup [A \odot B]_+$.

Приведем без доказательства следующую теорему:

ТЕОРЕМА

$$(A_{\sqrt[k]{a}})^k = A_a.$$

Здесь k -я степень множества понимается как произведение множества самого на себя k раз.

В связи с дедекиндовыми сечениями приведем одну нерешенную задачу.

Рассмотрим $A, B \subset \mathbb{Z}$. Иногда $|A \oplus B| \ll |A| \cdot |B|$. Например, если $A = B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, то должно быть порядка $\frac{7^2}{2}$ сумм, а их всего 13 (все целые числа от -6 до 6). Это верно для любых арифметических прогрессий. А если в качестве подмножеств A и B рассматривать геометрические прогрессии, то будет выполнено $|A \odot B| \ll |A| \cdot |B|$.

ЗАДАЧА

Существуют ли такие подмножества $A, B \subset \mathbb{Z}$, что одновременно $|A \oplus B| \ll |A| \cdot |B|$ и $|A \odot B| \ll |A| \cdot |B|$?

Можно убедиться, что сумма и произведение дедекиндовых сечений являются дедекиндовыми сечениями. На основе введенных таким образом операций можно строить арифметику дедекиндовых сечений.

ЕЩЕ ОДИН ПРЕДЕЛ

ТЕОРЕМА

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Достаточно доказать для $a > 1$, а при $a < 1$ заменить на $\frac{1}{a}$. Введем последовательность x_n таким образом:

$\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$. Надо доказать, что $\lim x_n = 0$.

4 $a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n$ по неравенству Коши.

Отсюда $x_n \leq \frac{a-1}{n}$, а эта последовательность сходится к нулю.

Теорема доказана.

УПРАЖНЕНИЕ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Здесь нужно использовать бином Ньютона и вспомнить, что последовательность $1, 1+a, 1+a+a^2, \dots$ сходится

к $\frac{1}{1-a}$ при $|a| < 1$.

На следующих, заключительных уроках курса, мы займемся экспонентой.