

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, если начиная с некоторого места $a_n > 0$,
и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
 $\Leftrightarrow \forall T > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ a_n > T$.

Наше утверждение эквивалентно тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = +\infty$,
если $b = \frac{1}{a} > 1$.

Во-первых, $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$, потому что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

К тому же $\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon n = +\infty$.

ЛЕММА КОШИ

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x > -1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Для $x > 0$ это неравенство легко следует из бинома Ньютона, т.к. справа отброшено несколько положительных слагаемых. Однако при $-1 < x < 0$ это не так. Поэтому докажем по индукции $\forall x > -1$.

При $n = 1$ выполнено. Предположим, что выполнено при $n = k$, докажем для $n = k + 1$.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x. \text{ Доказано.}$$

Для нашей последовательности $b^n = (1 + (b-1))^n \geq 1 + n(b-1)$, что $\rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЫ

КОММЕНТАРИЙ

Пусть последовательность $a^n > 0$, и, начиная с некоторого места, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < b < 1$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $M \in \mathbb{N}$ — такой момент, что $\forall n > M$ выполнено $\frac{a_{n+1}}{a_n} < b < 1$.

$$\text{Тогда } a_{M+1} \leq b a_M, a_{M+2} \leq b a_{M+1} \leq b^2 a_M, \dots, a_{M+r} \leq b^r a_M, \dots$$

Значит, начиная с некоторого места, последовательность зажата между 0 и b^n и по теореме о двух милиционерах сходится к нулю.

ПРИМЕР 1:

$$\forall k \geq 0, a > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

Показательная функция растет быстрее, чем степенная.

ПРИМЕР 1:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Факториал растет быстрее, чем показательная функция.

3

Докажем **пример 2** с помощью нашего комментария:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} < \frac{1}{2} \text{ при } n > 2|a|, \text{ а значит,}$$

$$a^n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Докажем теперь **пример 1**. Рассмотрим:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{k+1}}{n^k} \cdot \frac{a^n}{a^{n+1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^k}{a}.$$

Мы пользуемся при преобразованиях основными теоремами о пределах без доказательства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

$$\text{при } b_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

$$\exists m : (1 + \frac{1}{m})^k < 1 + \frac{a-1}{2}. \text{ Тогда } \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1 + \frac{a-1}{2}}{1 + (a-1)} = b < 1.$$

Таким образом, $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, согласно комментарию.

На следующем уроке мы познакомимся с моделями множества вещественных чисел.

1 ПОЛНОТА $\mathbb{R}$: ОКОНЧАНИЕ. КОРНИ И ПРЕДЕЛЫ

О КОРНЯХ

На предыдущих уроках мы изучили пять формулировок аксиомы полноты множества вещественных чисел (о вложенных отрезках, о пределе монотонной и фундаментальной последовательностей, существовании точной верхней грани и «вбивании гвоздя» между подмножествами).

УПРАЖНЕНИЕ

Доказать, что аксиомы A1, A2, A3, A4, A5 эквивалентны между собой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Тогда $x = \sqrt[k]{a}$ — корень k -й степени из числа a , если $x > 0$, и $x^k = a$.

ТЕОРЕМА

$\forall a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$ (положительного рационального)
 $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \quad \exists \sqrt[k]{a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим множество $A \subset \mathbb{R} \quad A = \{r \in \mathbb{Q}_+ : r^k < a\}$.
Очевидно, что A ограничено снизу. A сверху?

Если $a < 1$, то $A \leq 1$. Если $a \geq 1$, то $A \leq a$.

Таким образом, A — ограничено, а значит, по аксиоме A4 существует $\text{ТВГ}(A)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА

$(\text{ТВГ}(A))^k = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим $\alpha = \text{ТВГ}(A)$. Приведем к противоречию два утверждения: $\alpha^k < a$ и $\alpha^k > a$. Если $\alpha^k < a$, то между α^k и a найдется некоторое $r^k < a$, а значит, α — вообще не верхняя грань для A . Если $\alpha^k > a$, то α — не $\text{ТВГ}(A)$. Таким образом, $\alpha^k = a$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА

(о 2-х милиционерах) Если $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq b_n \leq c_n$, и последовательности a_n и c_n имеют одинаковый предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$, то последовательность b_n имеет тот же предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

ПРЕДЕЛ a^n

УТВЕРЖДЕНИЕ

Пусть $a < 1$, $a > 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.