

1 ПОЛНОТА $\mathbb{R}$: ПРОДОЛЖЕНИЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

В примере из прошлого

урока с цепной дробью
$$\alpha_n = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\dots \alpha_n}}}$$

возникала система вложенных отрезков, длина которых стремится к нулю при n .

Можно доказать, что
$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

По аксиоме A1 у этих отрезков есть ровно одна точка пересечения.

Мы хотим ввести понятие последовательности, которая, не будучи монотонной, стабилизируется внутри себя, т.е. с некоторого номера ее элемента все остальные элементы попадают в уменьшающийся интервал. Каждый раз оставшееся затухание колебаний нашей последовательности происходит внутри все меньшего интервала вокруг очередного члена последовательности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Последовательность a_n называется **фундаментальной** (сходящейся внутри себя, сходящейся в себе), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такой номер, что $\forall k = 1, 2, \dots$
 $a_N \in (a_N - \varepsilon; a_N + \varepsilon)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

ТРЕТЬЯ ФОРМУЛИРОВКА АКСИОМЫ ПОЛНОТЫ

Приведем еще одну формулировку аксиомы о полноте $\mathbb{R}$, эквивалентную двум предыдущим.

АКСИОМА 3

Любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Далее мы докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Хотим строго вывести этот факт из нашей аксиоматики. Надо доказать, что $\forall \varepsilon \exists n: \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Это равносильно тому, что для любого сколь угодно большого числа существует натуральное число, большее этого числа:

$\forall T (= \frac{1}{\varepsilon}) \exists n \in \mathbb{N} : n > T$, т.е. множество $\mathbb{N}$ не ограничено сверху. Чтобы это доказать, нам нужна аксиома полноты в некоторой новой форме.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Непустое подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным сверху (снизу)**, если $\exists T \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a \in A \ a \leq T$ ($a \geq T$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется **ограничено сверху**. Тогда любое такое T , что $\forall a \in A \ a \leq T$, называется **верхней гранью** множества A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется **ограничено снизу**. Тогда любое такое T , что $\forall a \in A \ a \geq T$, называется **нижней гранью** множества A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Точной нижней гранью (инфимумом) множества A (обозначается т.н.г. A или $\inf A$) называется максимальный элемент множества всех нижних граней множества A .
 $\inf A = \max\{T, T \text{ — нижняя грань } A\}$.

4-Я И 5-Я ФОРМУЛИРОВКИ АКСИОМЫ ПОЛНОТЫ

АКСИОМА 4

Любое ограниченное сверху (снизу) подмножество имеет точную верхнюю грань (точную нижнюю грань).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным**, если оно ограничено сверху и снизу.

АКСИОМА 5

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ — такие непустые подмножества, что $A \leq B$, т.е. $\forall a \in A, \forall b \in B$ выполнено $a \leq b$. Тогда $\exists z \in \mathbb{R}$ такое, что $a \leq z \leq b \ \forall a \in A, b \in B$.

Другими словами, если одно множество расположено строго ниже другого, то между ними всегда можно «вбить клин» в виде некоторого вещественного числа.

ПРИМЕР

Для $A = \left\{ -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ т. в. г. $A = 0$.

Заметим, что если T — т.в.г., то $\forall \varepsilon > 0 \ T$ — уже не является верхней гранью.

Предположим, что $\mathbb{N}$ ограничено сверху. Тогда $\exists T = \text{т.в.г. } \mathbb{N}$.

Тогда $T - \frac{1}{2}$ — не верхняя грань. Значит, $\exists k \in \mathbb{N} : k > T - \frac{1}{2}$.

Но тогда натуральное число $k + 1 > T + \frac{1}{2} > T$, противоречие!

Значит, т.в.г. $\mathbb{N}$ не существует.

На следующих уроках мы вычислим некоторые другие важные пределы, рассмотрим модели множества вещественных чисел, а также поговорим о существовании корней k -й степени.