

ПОЛНОТА МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ. ЧАСТЬ 1

АКСИОМА ПОЛНОТЫ №1

Пифагор считал, что числа вида $\frac{m}{n}$ заполняют прямую. Одновременно с этим всегда присутствовала идея, что число это то, к чему можно как-то обратиться (существует конечный алгоритм его задания). Например, $\sqrt{2}$ — это длина диагонали квадрата со стороной, равной 1. π — это длина окружности, диаметр которой равен 1. Проблема в том, что множество конечных алгоритмов, как и всех конечных текстов счетно. Но мы уже знаем, что множество $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума, а значит, ко всем его точкам обратиться нельзя.

Можно измерить любую вещественную величину с различной точностью. Выбирая все большую точность измерения, мы локализуем нашу величину каждый раз в меньшем отрезке. Получается бесконечная последовательность вложенных отрезков. То, что в их пересечении действительно находится число, гарантирует нам аксиома полноты $\mathbb{R}$:

АКСИОМА 1

Любая последовательность вложенных отрезков имеет непустое пересечение. Вдобавок если длина неограниченно уменьшается, то в пересечении ровно одна точка.

В бесконечной последовательности вложенных отрезков левые их границы возрастают, а правые границы уменьшаются. Это нам дает переход к теории последовательностей.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Последовательностью чисел (точек, объектов) из множества X называется отображение $\mathbb{N} \rightarrow X$. Последовательность можно записать перечислением $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, или просто $\{a_i\}$, или задать формулой. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\{a_i\}$ — последовательность, $a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Последовательность $\{a_i\}$ называется **ограниченной**, если $\exists c > 0$ — константа, что $|a_i| < c \quad \forall i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Последовательность $\{a_i\}$ —

- **не убывающая**, если $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$;
- **строго возрастающая**, если $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$;
- **не возрастающая**, если $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$;
- **строго убывающая**, если $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Последовательность $\{a_i\}$ — **монотонная**, если она либо не убывающая, либо не возрастающая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Последовательность $\{a_i\}$ — **строго монотонная**, если она либо строго убывающая, либо строго возрастающая.

ПРЕДЕЛ МОНОТОННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Число M называется **пределом** монотонной последовательности a_n , если

- 1) $a_i \leq M \forall i$ для неубывающей последовательности, $a_i \geq M \forall i$ для невозрастающей последовательности;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists j$ такое, что $\forall i \geq j$ выполнено $|a_i - M| < \varepsilon$, т.е. $a_i \in (M - \varepsilon; M + \varepsilon)$.

Это означает, что какую маленькую окрестность точки M бы мы не взяли, в ней можно найти точку из последовательности, а также, все остальные точки.

Например, последовательность a_n концов вложенных отрезков, рассмотренных выше, стремится при $n \rightarrow \infty$ к той точке, которая лежит в пересечении всех отрезков.

АКСИОМА 2

Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

ПРИМЕРЫ И ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА

Не только монотонные последовательности имеют предел. Рассмотрим примеры, а затем сформулируем общее определение предела последовательности.

ПРИМЕР 1

БЕСКОНЕЧНАЯ ЦЕПНАЯ ДРОБЬ

$$\alpha_0 = a_0, \alpha_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, \alpha_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \dots$$

Эта последовательность все время «мигает», но интервал, внутри которого она осциллирует, постепенно уменьшается и в итоге схлопывается в точку.

ПРИМЕР 2

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, \dots$$

Эта последовательность также не является монотонной, но сходится к 0 при $n \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Число M называется пределом последовательности x_n (обозначается $M = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ или $x_n \rightarrow M$ при $n \rightarrow \infty$),

если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ такой номер, что $\forall n \geq N$
 $x_n \in (M - \varepsilon; M + \varepsilon)$.

Не любая последовательность имеет предел, даже если она ограничена.

ПРИМЕР

Пусть $x_1, x_3, x_5, \dots = 1, x_0, x_2, x_4, \dots = 0$. Такая последовательность не имеет предела.

Нужно как-то описать те последовательности, которые не монотонны, но имеют предел. Этим мы займемся на следующем уроке, а также приведем еще некоторые формулировки аксиомы полноты множества вещественных чисел.