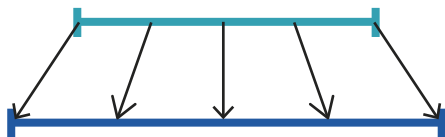


1 ОТРЕЗОК ГОМЕОМОРФЕН ИНТЕРВАЛУ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Континуум — это мощность отрезка.

Все отрезки равномощны между собой, потому что всегда можно установить взаимно однозначное соответствие между двумя отрезками любой длины.



Также на прошлом уроке мы доказали, что интервал равномощен отрезку, а значит, мощность интервала есть континуум.

Опишем сейчас еще одно взаимно однозначное соответствие между интервалом и отрезком, при котором близкие точки переходят в близкие (такое отображение называется гомеоморфизмом и связано с понятием непрерывности).

Для начала приведем их к одинаковой длине и центрируем. Концевые точки отрезка можно перевести в середины половинок интервала. Середины половинок отрезка переведем в середины четвертинок интервала и т.д. В результате все остальные точки отрезка переходят в соответствующие точки интервала за исключением выделенного счетного подмножества.

Нельзя впихнуть 101 точку в 100, а вот $\infty + 1$ можно впихнуть в ∞ ! Эта конструкция называется «Отель Гильберта». Это бесконечное вправо количество комнат. При появлении

нового постояльца для него освобождается первый (самый левый) номер, а каждый жилец перемещается в соседнюю от него комнату справа.

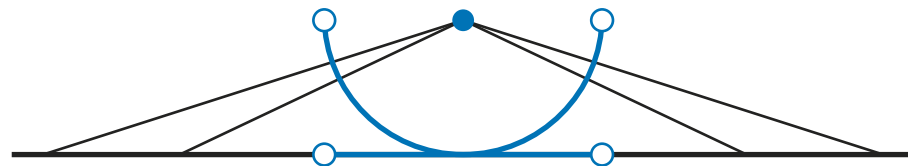
Таким образом, мощность отрезка, интервала и полуинтервала одинакова.

ТЕОРЕМА

$\mathbb{R} \sim (a; b)$ ($\mathbb{R}$ имеет мощность континуума).
Более того, $\mathbb{R}$ гомеоморфно интервалу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Найдем центр интервала, при помощи взаимно однозначного отображения концы интервала «загибаем» вверх, чтобы образовалась полуокружность. Из центра полуокружности проводим прямые через каждую ее точку до пересечения с прямой. Таким образом будет заполнена вся прямая.



Непрерывность данного взаимно однозначного соответствия не очень ясна при приближении к краю полуокружности. Однако, т.к. краев у интервала нет, любые две бесконечно близкие к краю точки будут иметь близкие образы на прямой. Позже мы сформулируем все эти понятия более четко, когда введем понятие предела. Теорема доказана.

Итак, любое естественное подмножество прямой имеет мощность континуума. А что с плоскостью? Оказывается, плоскость тоже имеет мощность континуума.

МОЩНОСТЬ $2^{\mathbb{N}}$ ЕСТЬ КОНТИНУУМ

ТЕОРЕМА

$$2^{\mathbb{N}} \sim [0; 1).$$

Множество всех подмножеств счетного множества имеет мощность континуума.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

В процессе доказательства мы столкнемся с тем, что нам необходима аксиома полноты множества вещественных чисел.

Будем строить взаимно однозначное соответствие следующим образом. Разобьем полуинтервал на два полуинтервала. Каждой точке сопоставим цифру 0, если она попала в левую половинку, и 1, если она попала в правую половинку. Далее, делим половинки на два полуинтервала каждую. В зависимости от того, куда попала точка, ставим вторую цифру: 0 или 1. И так далее. В результате каждой точке ставится в соответствие бесконечная последовательность из нулей и единиц. Например, 101110010...

Таким образом, $\varphi: [0; 1) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ задает номера мест, на которых стоят единицы.

Для точки с кодом 101110010... это будет такое подмножество $\mathbb{N}$: $\{0, 2, 3, 7, \dots\}$.

Очевидно, что φ — инъекция. Если мы возьмем любые две очень близкие точки, в какой-то момент они обязательно будут разделены при делении отрезка, а значит, будут иметь разные последовательности.

φ — ПОЧТИ БИЕКЦИЯ

Утверждается, что φ — почти биекция. Есть две проблемы, одна из которых несущественная, а другая существенная и связана с аксиомой полноты.

Несущественная проблема состоит в том, что не все бесконечные последовательности нулей и единиц будут востребованы. Дело в том, что не будет последовательностей с бесконечным хвостом из единиц. Это связано с тем, что, например, при приближении к правому концу полуинтервала $[0; \frac{1}{2})$ не может быть точки с последовательностью 01111..., т.к. она ни на какую величину не отличается от 100000..., что соответствует $\frac{1}{2}$, а значит, должна с ней совпадать.

ЛЕММА

- а) Множество конечных последовательностей из нулей и единичек счетно.
- б) Для любого бесконечного множества A выполнено: $A \sim A \cup \mathbb{N}$ (добавление счетного множества не влияет на мощность бесконечного множества).

Пункт а) очевиден. Можно перечислять по мере роста длины, как мы делали со множеством алгебраических чисел.

Доказательство пункта б) напоминает доказательство равномощности интервала и отрезка. Выделяем в самом множестве A еще один экземпляр $\mathbb{N}$ (счетное подмножество). Вместе с добавочным $\mathbb{N}$ это по сути экземпляр $\mathbb{Z}$. Между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ существует взаимно однозначное соответствие, а все остальные точки A отправляем в самих себя. Лемма доказана.

Теперь перейдем к обсуждению более существенной проблемы.

ПОТРЕБНОСТЬ В АКСИОМЕ ПОЛНОТЫ $\mathbb{R}$

Итак, у нас есть $\varphi: [0; 1) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ (звездочка означает, что мы исключили последовательности с бесконечным хвостом из единиц).

Что за отображение будет обратным к φ , т.е. какой точке соответствует данная бесконечная последовательность нулей и единиц?

Например, **010011...**

Сначала берем полуинтервал $[0; \frac{1}{2})$, затем $[\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$, затем $[\frac{1}{4}; \frac{3}{8})$ и так до бесконечности. В итоге получаем бесконечную последовательность вложенных отрезков.

ВОПРОС:

А есть ли такая точка на прямой, которая принадлежит пересечению?

Нам нужна аксиома, которая будет гарантировать существование точки, которая принадлежит пересечению бесконечного множества вложенных отрезков. Это аксиома полноты множества вещественных чисел. Мы приведем несколько ее эквивалентных формулировок на следующем уроке, а пока воспользуемся ею для доказательства теоремы.

Мы получаем, что φ — биекция, и значит, теорема доказана.

ПЛОСКОСТЬ РАВНОМОЩНА ПРЯМОЙ

ТЕОРЕМА: $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как прямая равномощна отрезку, а плоскость — квадрату, достаточно доказать, что отрезок равномощен квадрату.

Так же как раньше каждой точке отрезка поставим в соответствие бесконечную последовательность нулей и единиц. Определим координаты соответствующей точки, принадлежащей квадрату: все цифры, стоящие на нечетных позициях, возьмем для первой координаты, а стоящие на четных — для второй. Например, точке отрезка с кодом **01001110...** сопоставим точку квадрата с координатами **[0011..., 1010...]**. Таких последовательностей нулей и единиц и таких пар последовательностей нулей и единиц одинаковое количество.

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и точками квадрата, откуда следует равномощность $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$.

Если при разбиении на две последовательности случилось так, что одна последовательность получила бесконечный хвост из единиц, то все такие точки можно отбросить, ведь это подмножество не более, чем счетно, и на мощность самого множества по лемме не влияет. Теорема доказана.

Начиная со следующего урока, мы перейдем к изучению аксиомы полноты множества вещественных чисел.