

КАНТОРОВА ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ.

ЧАСТЬ 2

ТЕОРЕМА КАНТОРА

ТЕОРЕМА КАНТОРА

Пусть A — любое множество, B — множество всех подмножеств множества A (обозначается $B = 2^A$). Тогда множества A и B не равномощны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Если множество A конечно, то утверждение очевидно. Например, пусть $A = \{x, y\}$. Тогда $B = 2^A = \{\emptyset, x, y, A\}$.

Пусть $A = \mathbb{N}$ (счетно). Во множестве $\mathbb{N}$ можно выделить бесконечно много подмножеств по любому признаку: $2^{\mathbb{N}} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \text{четные}, \text{простые}, \text{квадраты}, \text{кубы}, \dots\}$.

Оказывается, их количество не является счетным (их невозможно пронумеровать).

Докажем от противного. Пусть существует взаимно однозначное отображение $\varphi: A \rightarrow 2^A$.

Это означает, что всем подмножествам мы присвоили номера. Принадлежит ли номер подмножества самому подмножеству?

$a \in \varphi(a)$ или $a \notin \varphi(a)$?

Рассмотрим подмножество множества A всех номеров, которые не принадлежат соответствующим им подмножествам: $D = \{a, a \notin \varphi(a)\} \subset A$.

Тогда у этого подмножества есть номер:

$\exists d \in A$ такое, что $\varphi(d) = D$. Тогда не может быть верно ни $d \in \varphi(d)$, ни $d \notin \varphi(d)$.

Действительно, если $d \in \varphi(d) \Rightarrow d \in D \Rightarrow d \notin \varphi(d)$.

Если $d \notin \varphi(d) \Rightarrow d \in D$, а $D = \varphi(d)$!

Полученное противоречие свидетельствует о том, что наше предположение неверно, т.е. такого изоморфизма не существует.

Теорема доказана.

Таким образом, множество $2^{\mathbb{N}}$ не является счетным.

Позднее мы докажем, что оно равномощно отрезку $[0; 1]$, мощность которого называется **континуум**.

ТЕОРЕМА КАНТОРА-БЕРНШТЕЙНА

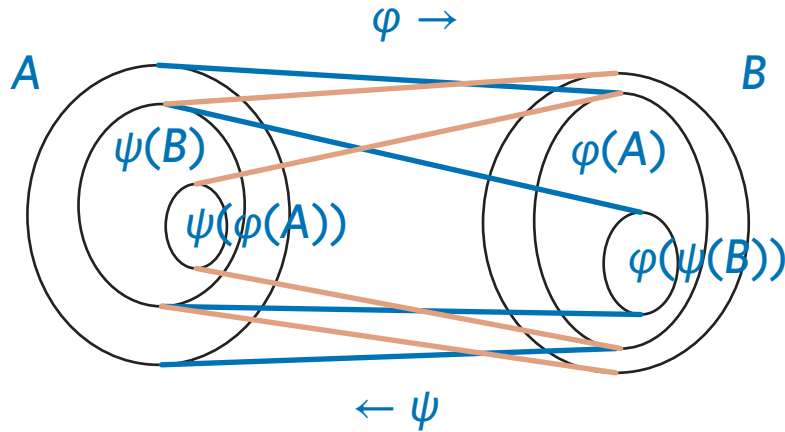
ТЕОРЕМА КАНТОРА-БЕРНШТЕЙНА

Пусть A и B — два множества, и существуют вложения $\varphi: A \rightarrow B$ и $\psi: B \rightarrow A$.

Тогда существует биекция (взаимно однозначное отображение) $\chi: A \rightarrow B$, т.е. A и B равномощны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Идея доказательства. Внутри B лежит $\varphi(A)$, внутри A лежит $\psi(B)$ внутри $\varphi(A)$ лежит $\varphi(\psi(B))$, внутри $\psi(B)$ лежит $\psi(\varphi(A))$ и т.д. Тогда можно рассматривать такие слои: те элементы из A , которые не попали в $\psi(B)$, те элементы из B , которые не попали в $\varphi(A)$ и т.д.



$\forall a \in A$ корректно определено натуральное число $I(a)$ (либо число “ ∞ ”): сколько раз можно взять его прообраз. Например, для $a \in A \setminus \psi(B) \equiv A_0$ будет $I(a) = 0$.

$\exists \dots \psi^{-1}(\varphi^{-1}(\psi^{-1}(a))) \dots I(a)$ раз.

Аналогично $\forall b \in B$ определим $I(b)$ так, что

$\exists \dots \varphi^{-1}(\psi^{-1}(\varphi^{-1}(b))) \dots I(b)$ раз.

Установим взаимно однозначное соответствие между A и B , перекомбинировав эти множества с точки зрения параметра количества прообразов.

Множества A и B разбиваются в несвязные объединения подмножеств, куда попадают элементы с данным количеством прообразов либо с количеством прообразов, равным бесконечности:

$$A = [A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots] \cup A_\infty;$$

$$B = [B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_n \cup \dots] \cup B_\infty.$$

Тогда взаимно однозначное отображение $\lambda: A \rightarrow B$ строится по кирпичикам:

$$\lambda(a) = \varphi(a), \text{ если } a \in A_{\text{четн}} \text{ или } a \in A_\infty;$$

$$\lambda^{-1}(b) = \psi(b), \text{ если } b \in B_{\text{четн}}.$$

Эти два различных способа задания не противоречат друг другу, а в объединении полностью задают λ .

$\forall a \in A_\infty \varphi(a) \in B_\infty$. Аналогично $\forall b \in B_\infty$ его прообраз содержится в A_∞ . Таким образом, φ и ψ (а значит, и λ) устанавливают взаимно однозначное соответствие между A_∞ и B_∞ .

Теперь посмотрим, что происходит в конечных A_n . Возьмем, например, $a \in A_4$. Тогда $\varphi(a) \in B_5$. Далее, для элемента из B_1 , например, есть ровно один прообраз, и очевидно, что он лежит именно в A_0 . Так мы покрываем все элементы множеств A и B , следовательно, λ устанавливает между этими множествами взаимно однозначное соответствие.

Теорема доказана.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КАНТОРА-БЕРНШТЕЙНА

ЛЕММА: Отрезок и интервал равномощны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Воспользуемся теоремой Кантора-Бернштейна. С одной стороны, интервал очевидным образом вкладывается в отрезок. А отрезок можно, например, сжать в 2 раза, и он целиком уместится в интервал. Имеем два вложения, а следовательно, взаимно однозначное отображение.

2 Другой способ доказательства.

Можно рассматривать отрезок $[-1; 1]$ и интервал $(-1; 1)$, т.к. любой отрезок $[a; b]$ можно получить из $[-1; 1]$ сдвигом и растяжением.

Вырежем точки с координатами $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots$

Оставшиеся точки сопоставим друг другу, а вырезанные точки сопоставим со сдвигом:

$$\pm 1 \rightarrow \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \rightarrow \pm \frac{1}{3}, \dots$$

Таким образом, взаимно однозначное отображение построено, следовательно, отрезок и интервал равномощны.

Лемма доказана.