

КАНТОРОВА ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ. ЧАСТЬ 1

БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

Мы знаем множества чисел: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Все они являются бесконечными.

ВОПРОС: все ли бесконечные множества устроены одинаково?

ПРИМЕР

Действительно ли множество $\mathbb{Z}$ ровно в 2 раза больше множества $\mathbb{N}$?

С одной стороны, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. С другой стороны, мы можем так сопоставить элементы этих двух множеств, что $\mathbb{Z}$ окажется вложенным в $\mathbb{N}$:

$$\pm 1 \rightarrow 2, 4;$$

$$\pm 2 \rightarrow 6, 8;$$

...

$$k \rightarrow 4k;$$

$$-k \rightarrow 4k - 2.$$

Таким образом, мы вложили $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{N}$ так, что даже остались незатронутыми нечетные числа!

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Множества A и B называются **равномощными** (одинаковыми по мощности), если существует взаимно однозначное отображение (изоморфизм) из A в B .

РАВНОМОЩНОСТЬ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ И $\mathbb{Q}$

ТЕОРЕМА:

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ ($\mathbb{N}$ равномощно $\mathbb{Z}$).

Т.е. : $\exists \varphi \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ — взаимно однозначное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Будем считать, что $0 \in \mathbb{N}$ (это удобно в теории множеств).

Можно определить $\varphi^{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ таким образом:

$$\varphi^{-1}(0) = 0;$$

$$\varphi^{-1}(k) = 2k \text{ при } k > 0;$$

$$\varphi^{-1}(k) = -1 - 2k \text{ при } k < 0.$$

Очевидно, что φ^{-1} — биекция (а, значит, и φ — биекция).

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2: $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ ($\mathbb{Q}$ равномощно $\mathbb{N}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Будем строить изоморфизм следующим образом.

$$0 \rightarrow 0.$$

Каждое число из $\mathbb{Q}$ представимо в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$. Сопоставим каждой дроби ее «высоту» $h\left(\frac{m}{n}\right) = |m + n|$. Утверждается, что дробей с заданной «высотой» конечное число.

Выпишем все дроби для нескольких первых значений h и присвоим им номера:

$h = 2$	$1, -1$	номера 1, 2;
$h = 3$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}$	номера 3, 4, 5, 6;
$h = 4$	$\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}$	номера 7, 8, 9, 10;
$h = 5$	$\pm \frac{1}{4}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{4}{1}$	номера 11 – 18 и т.д.

При такой нумерации каждое число из $\mathbb{Q}$ получает соответствующее ему число из $\mathbb{N}$, и такое соответствие взаимно однозначно. Теорема доказана.

ПРИМЕРЫ СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Множество, мощность которого равна мощности множества $\mathbb{N}$, называется **счетным**.

ВОПРОС: Все ли бесконечные множества счетны?

Оказывается, нет. Существуют множества, элементы которых не достижимы ни одним способом перечисления. О них мы будем говорить позже, а пока приведем несколько примеров счетных множеств.

ТЕОРЕМА 3

Множество алгебраических чисел счетно (Множество всех корней всех многочленов с целыми коэффициентами счетно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Каждому многочлену $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ с целыми коэффициентами степени n , не равному тождественно нулю, сопоставим его «высоту»:

$$h(f(x)) = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| + n.$$

Множество всех многочленов с «высотой», не превосходящей данное значение, конечно. Количество корней каждого многочлена не превосходит его степень. А значит, можно перечислить все корни всех многочленов.

$h = 1$ только у $f(x) \equiv 1$ и $f(x) \equiv -1$, корней нет.

$h = 2$ только у $f(x) = x$ и $f(x) = -x$, корень $x = 0$.

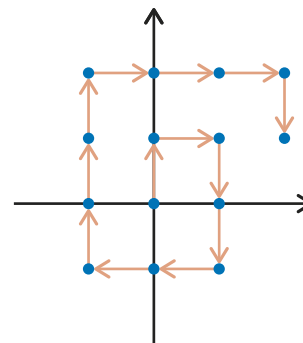
И т.д.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4: Множество гауссовых чисел счетно.

Для доказательства достаточно предложить способ нумерации всех гауссовых чисел. Один из способов — «улитка». Начиная с точки $(0; 0)$, проходим по всем точкам по спирали:

$$(0; 0) \rightarrow (0; 1) \rightarrow (1; 1) \rightarrow (1; 0) \rightarrow (1; -1) \rightarrow (0; -1) \dots$$



Теорема доказана.

3 ПОДМНОЖЕСТВО СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА НЕ БОЛЕЕ, ЧЕМ СЧЕТНО

ЛЕММА:

а) Подмножество счетного множества всегда счетно или конечно (не более, чем счетно).

б) Объединение счетного количества счетных множеств тоже счетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

а) Очевидно, так как множество элементов подмножества уже имеют номера, и их можно как угодно перенумеровать.

б) Множество гауссовых чисел как раз является таковым, так как фиксируя одну из координат, мы получаем в точности множество $\mathbb{Z}$. При этом координата тоже пробегает множество $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}[i] = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \{\mathbb{Z} + l \cdot i\}.$$

А нумерацию для множества гауссовых чисел мы уже построили.

Лемма доказана.

На следующем уроке мы поговорим о бесконечных множествах, которые устроены по-другому (не являются счетными).