

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ. ЧАСТЬ 2

ОРБИТЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Докажем ключевое утверждение, которое мы сформулировали в конце прошлого урока.

Пусть x — неподвижная точка одного из вращений нашего конечного списка. $\{T_1 = Id, T_2, \dots, T_m\}$ — соответствующие повороты на кратные углы вокруг оси, проходящей через точку x . Мы установили, что именно они оставляют x на месте. И пусть есть вращение V , которое переводит точку x в некоторую точку y . Тогда y — тоже неподвижная точка некоторых вращений.

Докажем это.

Рассмотрим список вращений $V, V \circ T_2, \dots, V \circ T_m$. Это все вращения, которые переводят x в y .

УПРАЖНЕНИЕ

Почему вращений, переводящих x в y не больше, чем m ?

Мы получили, что если m вращений оставляют точку x на месте, то существует ровно m вращений, которые могут перевести x в какую-то другую точку.

Это означает, что такими группами по m мы исчерпываем все r вариантов из нашего списка $\{s_1, s_2, \dots, s_r\}$. Это означает, что существует ровно $\frac{r}{m} \in \mathbb{N}$ точек, в которые может переходить x . Назовем эти точки орбитой точки x .

Почему точки, принадлежащие орбите, неподвижны? Рассмотрим преобразование $V \circ T_i \circ V^{-1}$. Оно переводит точку y в себя. Значит, ровно m вращений переводит точку y в себя.

Итак, для любой орбиты неподвижных точек конечной подгруппы вращений $\{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ для всех точек орбиты индекс m (количество вращений, оставляющих данную точку на месте) одинаковый. Размер орбиты равен $\frac{r}{m}$.

УПРАЖНЕНИЕ

Найти орбиты правильных многогранников. Это будут орбиты: вершин, центров граней и середин ребер.

ФОРМУЛА ОРБИТ

Вернемся к нашей таблице.

	s_2	s_3	...	s_r
x_1				
x_2				
...				
x_{2l-1}				
x_{2l}				

С одной стороны, число «плюсов» равно $2(r-1)$. С другой стороны, это следующая сумма по всем орбитам:

$$2(r - 1) = \sum_x m - 1 = \sum_{\text{орбиты } O_i} (m_i - 1) \cdot \#O_i,$$

где $\#O_i$ — количество точек в данной орбите. Это формула орбит. Вспомним, что $m_i \cdot \#O_i = r \quad \forall i$. Следовательно,

$$2(r - 1) = \sum_{i=1}^c (r - \#O_i), \text{ где } c — \text{число всех орбит.}$$

Разделив это уравнение на r , получим:

$$2 - \frac{2}{r} = \sum_{i=1}^c \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

Наблюдение: число слагаемых в правой части равенства равно 2 или 3.

Это следует из того, что левая часть $\in [1; 2)$, а каждое слагаемое в правой $\in [\frac{1}{2}; 1)$.

При $c = 2$ имеем:

$$2 - \frac{2}{r} = 1 - \frac{1}{m_1} + 1 - \frac{1}{m_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{r}{m_1} + \frac{r}{m_2} = 2.$$

Это возможно только если $m_1 = m_2 = r$. Две орбиты, и в каждой только одна неподвижная точка. Это вращение на угол $\frac{2\pi}{m}$ — тривиальный случай, не содержащий никаких многогранников.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Итак, пусть $c = 3$. Тогда имеем:

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 1 + \frac{2}{r}.$$

Пусть для определенности $m_1 \leq m_2 \leq m_3$.

ЛЕММА 1: $m_1 = 2$.

Очевидно, т.к. иначе в левой части получим не более, чем

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Значит, наше уравнение сводится к следующему:

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{r}.$$

ЛЕММА 2: $m_2 = 2$ или 3.

Очевидно, т.к. иначе в левой части получим не более, чем

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

УПРАЖНЕНИЕ

Разобрать случай $m_2 = 2$. Это ситуация правильного n -угольника, вписанного в «экватор» сферы. Группа вращений состоит из n поворотов и n отражений на окружности (группа диэдра).

Пусть $m_2 = 3$. Уравнение будет иметь вид:

$$\frac{1}{m_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{r}.$$

ЛЕММА 3: $m_3 = 3, 4$ или 5 .

Снова очевидно, т.к. 6 и более невозможно, ведь $\frac{2}{r} > 0$.

Для указанных значений m_3 получаем: $r = 12, 24, 60$.

Случаю $r = 12$ соответствует правильный тетраэдр, случаю $r = 24$ — куб и октаэдр, а случаю $r = 60$ — додекаэдр и икосаэдр.

Середины граней куба являются вершинами октаэдра, и наоборот, если взять середины граней октаэдра, мы получим куб. Поэтому группы вращений октаэдра и куба совпадают.

А если взять середины граней правильного тетраэдра, получим снова вершины правильного тетраэдра.

Мы рассмотрели все возможные случаи, а значит, других правильных многогранников не существует.

На этом мы заканчиваем знакомство с правильными многогранниками.