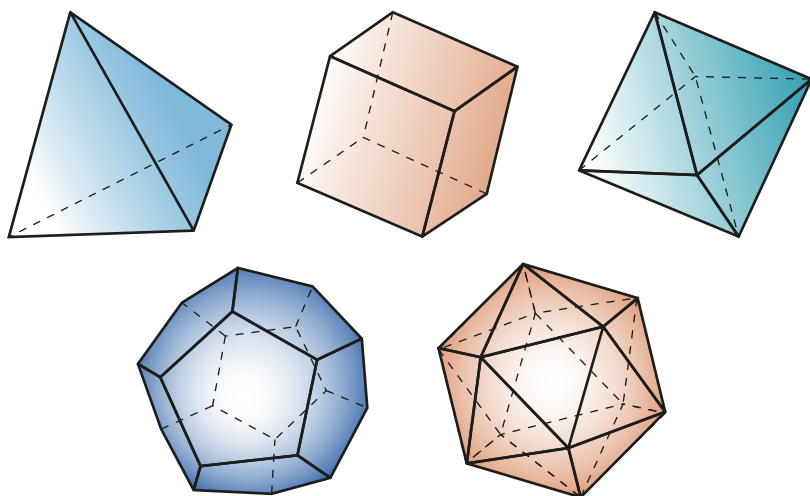


КЛАССИФИКАЦИЯ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ. ЧАСТЬ 1

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Правильных многогранников существует всего пять: тетраэдр, куб (гексаэдр), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.



Что же это такое?

Нет одного четкого определения, но мы будем использовать следующее:

Правильный многогранник — это многогранник, который со всех сторон выглядит одинаково.

Т.е. группа вращений правильного многогранника настолько богата, что любая пара (вершина, исходящее из нее ребро) переходит в любую другую пару (вершина, исходящее из нее ребро).

Отсюда видно, что правильность фигуры — это богатство ее группы симметрий.

Так как любой правильный многогранник можно вписать в сферу, мы будем рассматривать более объемную задачу: классификация конечных подгрупп группы вращений сферы.

Любое вращение многогранника можно описать перестановкой его вершин. Понятно, что это число конечно.

Из этой классификации мы выведем классификацию правильных многогранников, проследив, в каком случае какие многогранники возникают.

ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ ПРАВИЛЬНОГО ТЕТРАЭДРА И КУБА

У тетраэдра 12 вращений:

- повороты на 120° и 240° вокруг высоты к каждой из 4-х граней (8)
- повороты на 180° вокруг оси, проходящей через вершину и середину противоположного ребра (4).

У куба 24 вращения:

- повороты на 90° , 180° , 270° вокруг оси, проходящей через середины противоположных граней (9)
- повороты на 120° и 240° вокруг диагоналей (8)
- повороты на 180° вокруг оси, проходящей через середины противоположных ребер (6)

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

Пусть $\{s_1, s_2, \dots, s_r\} \subset SO(3)$ — конечная подгруппа группы вращений сферы.

ТЕОРЕМА

Любое собственное (не меняющее ориентацию) движение сферы — это поворот относительно некоторой оси, проходящей через центр, на некоторый угол.

Доказательство почти повторяет уроки, посвященные движениям прямой, окружности и плоскости.

Заметим, что для сферы выполнено то же свойство, что и для окружности: любое движение оставляет на месте две диаметрально противоположные точки одновременно (расстояние между ними максимально не может измениться).

Если две не противоположные точки остаются на месте, то вся окружность, проходящая через них, тоже неподвижна.

Если плюс к этим двум точкам еще одна неподвижна, то это тождественное преобразование. Если точка перешла в противоположную относительно плоскости неподвижной окружности, то это отражение.

Любое движение есть композиция 1, 2, 3 отражений относительно плоскостей, проходящих через центр сферы. При этом 1 и 3 отражения меняют ориентацию. Собственное вращение — композиция 2 отражений, а это поворот вокруг оси, по которой пересекаются два «экватора».

Таким образом, мы можем для каждого вращения зафиксировать ось, вокруг которой оно происходит. Каждая ось связана с двумя ее концами — противоположными точками на сфере. Т.е. каждой конечной подгруппе вращений сферы мы сопоставляем набор точек $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — концов осей.

ВОПРОС:

Как по-другому охарактеризовать эти точки?

ОТВЕТ:

Эти точки — неподвижные точки некоторых нетривиальных вращений.

ТАБЛИЦА ПЛЮСОВ

Рассмотрим какое-нибудь вращение $T \in \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$. Ряд $T, T \circ T, \dots, T^i$ не может быть бесконечным, т.к. содержится в конечной подгруппе, а значит, для некоторого m $T^m = Id$. Любое вращение будет на угол, соизмеримый с 2π , т.е. $m\varphi : 2\pi$. Все вращения разбиваются на группы вращений вокруг конкретной оси на кратные углы, порожденные каким-то минимальным углом.

Мы располагаем все нетривиальные вращения в одну строку, а в столбец — все неподвижные точки $\{x_1, x_2, \dots, x_{2l}\}$.

	S_2	S_3	...	S_r
x_1				
x_2				
...				
x_{2l-1}				
x_{2l}				

Будем заполнять таблицу «плюсами» и «минусами» в соответствии с тем, оставляет ли данное вращение данную точку на месте.

В каждом столбце находится ровно два «плюса». Поэтому число «плюсов» равно $2(r-1)$.

А теперь мы подсчитаем количество плюсов другим способом: возьмем точку и посмотрим, сколько вращений оставляют ее на месте. Получается $m-1$, если $\frac{2\pi}{m}$ — порождающий угол. Вопрос, какое количество точек имеет одинаковое количество «плюсов» (кроме противоположных)?

Мы можем утверждать, что если при каком-то вращении, например, точка x_2 перешла в x_5 , то подгруппа, сохраняющая на месте x_2 , будет иметь тот же порядок, что и подгруппа, сохраняющая на месте x_5 .

Это ключевое утверждение мы докажем на следующем уроке.