

1 ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНОГО 17-УГОЛЬНИКА

ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

Итак, нам нужно построить с помощью циркуля и линейки число $x = \eta + \eta^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$.

Мы ввели в рассмотрение числа

$v_a = \eta^a + \eta^{-a} = 2\cos\frac{2\pi a}{17}$ и установили, что $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = -1$.

Чтобы понять, что дальше делать, рассмотрим построение правильного пятиугольника еще одним способом — способом Гаусса.

Отметим на комплексной плоскости вершины правильного пятиугольника, вписанного в единичную окружность:

$$\xi = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\xi^2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5},$$

$$\xi^3 = \cos\frac{4\pi}{5} - i\sin\frac{4\pi}{5} = \xi^{-2},$$

$$\xi^4 = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} = \xi^{-1},$$

Обозначим $v_1 = \xi + \xi^{-1}$, $v_2 = \xi^2 + \xi^{-2}$.

Тогда получим: $v_1 + v_2 = -1$.

А что будет, если мы перемножим v_1 и v_2 ?

$$\begin{aligned} v_1 v_2 &= (\xi + \xi^{-1})(\xi^2 + \xi^{-2}) = \xi^3 + \xi + \xi^{-1} + \xi^{-3} = \\ &= \xi^{-2} + \xi + \xi^{-1} + \xi^2 = -1. \end{aligned}$$

Таким образом, v_1 и v_2 — корни квадратного уравнения $(x - v_1)(x - v_2) = x^2 - (v_1 + v_2)x + v_1 v_2 = x^2 + x - 1$.

Находим $v_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ и дальше строим v_1 циркулем и линейкой (мы уже знаем, что это возможно, т.к. он вычислим на квадратичном калькуляторе).

Используем этот же метод при построении правильного 17-угольника.

ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНОГО 17-УГОЛЬНИКА

Идея: найти квадратные уравнения, корнями которых являются v_a . Для этого нам нужны их произведения.

Например, $v_2 v_5 = (\eta^2 + \eta^{-2}) + (\eta^5 + \eta^{-5}) = \eta^7 + \eta^3 + \eta^{-3} + \eta^{-7} = (\eta^3 + \eta^{-3}) + (\eta^7 + \eta^{-7}) = v_3 + v_7$.

ЛЕММА $v_a v_b = v_{|a-b|} v_{|a+b|}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\begin{aligned} v_a &= \eta^a + \eta^{-a}, v_b = \eta^b + \eta^{-b} \Rightarrow v_a v_b = (\eta^a + \eta^{-a}) \cdot \\ &\cdot (\eta^b + \eta^{-b}) = \eta^{a+b} + \eta^{a-b} + \eta^{b-a} + \eta^{-(a+b)} = \\ &= (\eta^{a+b} + \eta^{-(a+b)}) + (\eta^{a-b} + \eta^{-(a-b)}) = v_{|a+b|} v_{|a-b|}. \end{aligned}$$

Доказано.

КОММЕНТАРИЙ

По данной формуле должно быть, например, $v_5 v_7 = v_2 v_{12}$, но v_{12} у нас нет! На самом деле, $v_{12} = \eta^{12} + \eta^{-12} = \eta^5 + \eta^{-5} = v_5$, т.к. $12 + 5 = 17$.

Поэтому если $|a + b| > 8$ (или $|a - b| > 8$), нужно брать вместо него число, дополняющее его до 17.

ВЫЧИСЛЕНИЕ AB

Разобьем числа $v_1, v_2, \dots, v_8$ на две группы:

$$A = v_1 + v_2 + v_4 + v_8, \quad B = v_3 + v_5 + v_6 + v_7.$$

Исходя из доказанного ранее, $A + B = -1$.

Докажем, что $A + B = -1$.

Составим таблицу умножения всех слагаемых, входящих в A на все слагаемые, входящие в B :

	v_3	v_5	v_6	v_7
v_1	$v_2 + v_4$	$v_4 + v_6$	$v_5 + v_7$	$v_6 + v_8$
v_2	$v_1 + v_5$	$v_3 + v_7$	$v_4 + v_8$	$v_5 + v_8$
v_4	$v_1 + v_7$	$v_1 + v_8$	$v_2 + v_7$	$v_3 + v_6$
v_8	$v_5 + v_6$	$v_3 + v_4$	$v_2 + v_3$	$v_1 + v_2$

Произведение AB есть сумма всех элементов этой таблицы. Найдем все вхождения v_1 , затем все вхождения v_2 , затем v_3 и т.д. Таким образом,

$$AB = 4v_1 + 4v_2 + 4v_3 + \dots + 4v_8 = 4(-1) = -4.$$

Рассмотрим многочлен $(x - A)(x - B) = x^2 - (A + B)x + AB$.

По доказанному нами $(x - A)(x - B) = x^2 + x - 4$.

Получается, что A и B могут быть найдены по формуле корней квадратного уравнения:

$$A, B = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Замечаем, что должно быть $A > 0, B < 0$, поэтому

$$A = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad B = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.$$

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗБИЕНИЕ A И B

Введем следующие числа:

$$\alpha = v_1 + v_4;$$

$$\beta = v_2 + v_8;$$

$$\gamma = v_3 + v_5;$$

$$\delta = v_6 + v_7.$$

Докажем, что $\alpha\beta = \gamma\delta = -1$.

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (v_1 + v_4)(v_2 + v_8) = v_1v_2 + v_1v_8 + v_2v_4 + v_4v_8 = \\ &= v_1 + v_3 + v_7 + v_8 + v_6 + v_2 + v_4 + v_5 = -1. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \gamma\delta &= (v_3 + v_5)(v_6 + v_7) = v_3v_6 + v_3v_7 + v_5v_6 + v_5v_7 = \\ &= v_3 + v_8 + v_4 + v_7 + v_1 + v_6 + v_2 + v_5 = -1. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь два уравнения:

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 - Ax - 1 = 0;$$

$$(x - \gamma)(x - \delta) = 0 \Rightarrow x^2 - (\gamma + \delta)x + \gamma\delta = 0 \Rightarrow x^2 - Bx - 1 = 0.$$

3

Мы можем найти корни этих квадратных уравнений. С учетом того, что $\alpha, \gamma > 0$, $\beta, \delta < 0$, получаем:

$$\alpha = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + 1}, \quad \beta = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + 1},$$

$$\gamma = \frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + 1}, \quad \delta = \frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{4} + 1}.$$

Рассмотрим $\alpha = v_1 + v_4$. Найдем $v_1 v_4$:
 $v_1 v_4 = v_5 + v_3 = \gamma$. Таким образом, числа v_1 и v_4 можно получить как корни многочлена
 $(x - v_1)(x - v_4) = x^2 - x(v_1 + v_4) + v_1 v_4 = x^2 - \alpha x + \gamma$.

Имеем:

$$v_1 = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \gamma}, \quad v_4 = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \gamma}.$$

Осталось вспомнить, что $\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{1}{2} v_1$.

ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ФОРМУЛА

Наконец, мы готовы окончательно выписать выражение для $\cos \frac{2\pi}{17}$:

$$\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{17}-1}{4} + \sqrt{1 + \frac{(\sqrt{17}-1)^2}{16}} \right)^2 + \frac{\sqrt{17}+1}{4} -$$

$$- \sqrt{\frac{(\sqrt{17}+1)^2}{16} + 1}$$

Мы видим, что вычисление $\cos \frac{2\pi}{17}$ есть не что иное, как программа для квадратичного калькулятора.

Следовательно, отрезок такой длины мы можем построить при помощи циркуля и линейки. А значит, можем построить и сторону правильного 17-угольника.