

1 ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНОГО n -УГОЛЬНИКА

КАКИЕ ПРАВИЛЬНЫЕ n -УГОЛЬНИКИ МОГУТ БЫТЬ ПОСТРОЕНЫ?

Ранее мы доказали, что выполнение любого построения циркулем и линейкой на координатной плоскости эквивалентно вычислению на квадратичном калькуляторе, т.е. любые построенные на координатной плоскости отрезки имеют длину, которую за конечное число действий можно получить из единицы операциями $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{}$.

Мы установили, что длины сторон правильных семи- и девятиугольников не могут быть вычислены на квадратичном калькуляторе, т.к. соответствующие числа не принадлежат башне квадратичных расширений поля $\mathbb{Q}$.

ВОПРОС:

Какие правильные n -угольники могут быть построены циркулем и линейкой?

ЛЕММА

- 1) Если правильный (nk) -угольник может быть построен циркулем и линейкой, то и правильный n -угольник тоже может быть построен.
- 2) Если $\text{НОД}(n, k) = 1$, и правильные n -угольник и k -угольник могут быть построены, то может быть построен и правильный (nk) -угольник.

3) Правильный $2n$ -угольник может быть построен $\Leftrightarrow$ правильный n -угольник может быть построен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Очевидно. Если построен правильный (nk) -угольник, можно соединить между собой каждую k -ю вершину. Получим правильный n -угольник.

2) Пусть мы построили правильные k - и n -угольники, вписанные в окружность. Чтобы построить правильный (nk) -угольник, нужно построить центральный угол $\frac{2\pi}{nk}$.

Утверждается, что всегда можно так расположить вершины k - и n -угольников, чтобы минимальный центральный угол между вершиной k -угольника и ближайшей вершиной n -угольника был равен $\frac{2\pi}{nk}$.

Докажем это утверждение. Оно означает, что для некоторых a и b выполнено:

$$\frac{2\pi}{n} a - \frac{2\pi}{k} b = \pm \frac{2\pi}{nk}.$$

Отсюда $ka - nb = \pm 1$. Это диофантово уравнение, которое сводится заменой к хорошо известному нам уравнению: $\hat{k}a + \hat{n}b = 1$, что как раз эквивалентно тому, что $\text{НОД}(n, k) = 1$.

3) Очевидно, т.к. умеем строить биссектрису угла.

Лемма доказана

Таким образом, можно рассматривать задачу только для нечетных n . Учитывая, что n раскладывается в произведение степеней нечетных простых чисел, по лемме можно сузить рассмотрение до правильных p^k -угольников при нечетных простых p .

ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНОГО p^k -УГОЛЬНИКА

ТЕОРЕМА

- 1) Построение циркулем и линейкой правильного p^2 -угольника невозможно (а следовательно, невозможно построение правильного p^k -угольника при $k \geq 2$).
- 2) (Гаусс - Галуа) Правильный p -угольник может быть построен циркулем и линейкой $\Leftrightarrow p = 2^k + 1, k \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Доказательство пункта 1) оставим за рамками курса. Приведем доказательство только пункта 2).

Пусть мы построили правильный p -угольник, вписанный в единичную окружность на комплексной плоскости. Тогда его вершине соответствует комплексное число

$$\eta = \sqrt[p]{1} = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}.$$

Минимальный многочлен для числа η имеет вид $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$, а этот многочлен не разложим над полем $\mathbb{Q}$. Значит, степень расширения $\mathbb{Q}(\eta)$ равна $p - 1$.

Получаем, что η можно построить циркулем и линейкой $\Leftrightarrow p - 1 = 2^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ (принадлежит башне квадратичных расширений поля $\mathbb{Q}$). Доказано.

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ФЕРМА

ЛЕММА: Если число $2^k + 1$ — простое, то $k = 2^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

От противного. Если $k \neq 2^l$, то у k существует нечетный простой делитель: $k = (2r + 1)s$.

Тогда $2^k + 1 = (2^s)^{2r+1} + 1^{2r+1} = (2^s + 1)(2^{2rs} - \dots + 1)$, а это число составное. Доказано.

Числа вида $2^k + 1$, где $k = 2^l$, называются **простыми числами Ферма**.

При $l = 0$ $k = 1$, $2^k + 1 = 2^1 + 1 = 3$ — простое;
 при $l = 1$ $k = 2$, $2^k + 1 = 2^2 + 1 = 5$ — простое;
 при $l = 2$ $k = 4$, $2^k + 1 = 2^4 + 1 = 17$ — простое;
 при $l = 3$ $k = 8$, $2^k + 1 = 2^8 + 1 = 257$ — простое;
 при $l = 4$ $k = 16$, $2^k + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$ — простое.

Но при $l = 5$ $k = 32$, $2^k + 1 = 2^{32} + 1$ — составное число, оно делится на 641 (установлено Эйлером). При помощи компьютера установлено, что при $l = 6, 7$ числа данного вида также будут составными.

Таким образом, в настоящий момент науке известно только пять простых чисел Ферма.

3 ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНОГО 17-УГОЛЬНИКА (НАЧАЛО)

Рассмотрим на комплексной плоскости корни 17-й степени из 1. Все они расположены на единичной окружности через равные промежутки симметрично относительно оси Ox и являются вершинами правильного 17-угольника:

$$\eta = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17},$$

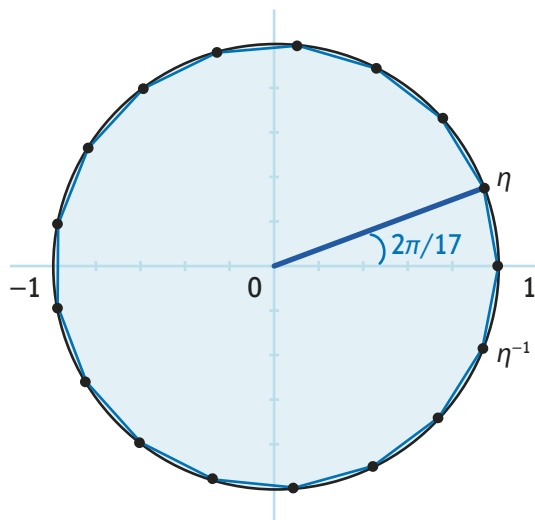
$$\eta^2 = \cos \frac{4\pi}{17} + i \sin \frac{4\pi}{17},$$

...

$$\eta^{16} = \cos \frac{2\pi}{17} - i \sin \frac{2\pi}{17} = \eta^{-1},$$

$$\eta^{17} = 1.$$

Нам достаточно научиться строить число $x = \eta + \eta^{-1} = 2\cos \frac{2\pi}{17}$, и тогда циркулем и линейкой может быть построена сторона правильного 17-угольника.



Будем изучать множество 17 комплексных чисел $\{1, \eta^{\pm 1}, \eta^{\pm 2}, \dots, \eta^{\pm 8}\}$.

Заметим, что

$$v_1 = \eta + \eta^{-1} = 2\cos \frac{2\pi}{17};$$

$$v_2 = \eta^2 + \eta^{-2} = 2\cos \frac{4\pi}{17};$$

...

$$v_8 = \eta^8 + \eta^{-8} = 2\cos \frac{16\pi}{17}.$$

Таким образом, все числа $v_1, v_2, \dots, v_8$ вещественны.

По аналогии с правильным 7-угольником, сумма чисел $1, \eta^{\pm 1}, \eta^{\pm 2}, \dots, \eta^{\pm 8}$ равна нулю. Отсюда $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = -1$.

На следующем уроке мы продолжим изучение свойств чисел $v_1, v_2, \dots, v_8$.