

ЗАДАЧА О ТРИСЕКЦИИ УГЛА

КАК ДОКАЗАТЬ НЕВОЗМОЖНОСТЬ

Задача о трисекции угла состоит в том, чтобы при помощи циркуля и линейки разделить угол на три равные части.

На самом деле, некоторые углы можно разделить на три части при помощи циркуля и линейки. Однако не существует единого алгоритма, следуя которому можно построить трисекцию любого угла. Потому что если бы он существовал, мы смогли бы разделить на три части угол, равный 30° , т.е. построить угол с градусной мерой 10° . Сейчас мы докажем, что это невозможно, потому что число $\sin 10^\circ$, как и $\sqrt[3]{2}$, и $2\cos \frac{2\pi}{7}$, является корнем многочлена 3-й степени, неразложимого над $\mathbb{Q}$.

Мы получим этот многочлен двумя способами: тригонометрически и с использованием комплексных чисел.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ

Воспользуемся формулами синуса и косинуса суммы, которые мы уже дважды доказали в нашем курсе (через комплексные числа и через матрицы):

$$\begin{aligned}\sin(\varphi + \psi) &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi; \\ \cos(\varphi + \psi) &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi.\end{aligned}$$

Получим на их основе формулы для двойного и тройного угла:

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha = \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha = \\ &= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

При $\alpha = 10^\circ$ получим из последнего равенства:

$\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$. Учитывая $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ и обозначив $y = 2\sin 10^\circ$, получим, что y удовлетворяет следующему уравнению: $y^3 - 3y + 1 = 0$.

МНОГОЧЛЕН $y^3 - 3y + 1$ НЕ РАЗЛОЖИМ НАД $\mathbb{Q}$

Воспользуемся здесь рассуждениями, проведенными ранее для минимального многочлена числа $2\cos \frac{2\pi}{7}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Рациональными корнями многочлена, старший и младший коэффициенты которого равны ± 1 , могут быть только 1 и -1 .

Очевидно, ни 1 , ни -1 не являются корнями многочлена $y^3 - 3y + 1$, а значит, для него не существует представления $y^3 - 3y + 1 = (\alpha y + \beta)(\gamma y + \delta y + \rho)$ ни для каких рациональных коэффициентов. Значит, он не разложим над $\mathbb{Q}$, и $\dim \mathbb{Q}(2\sin 10^\circ)/\mathbb{Q} = 3$. А значит, мы не можем построить трисекцию угла 30° при помощи циркуля и линейки, единого алгоритма не существует.

СПОСОБ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Изобразим на комплексной плоскости единичную окружность и отрезок $y = 2\sin 10^\circ$. Пусть $\eta = \cos 10^\circ + i \cdot \sin 10^\circ$.

Тогда $\eta - \eta^{-1} = i \cdot 2\sin 10^\circ = iy$.

Найдем $(\eta - \eta^{-1})^3 = \eta^3 - 3\eta + 3\eta^{-1} - \eta^{-3}$.

Так как $\eta^3 = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$,

$\eta^{-3} = \cos 30^\circ - i \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, получаем $\eta^3 - \eta^{-3} = \frac{i}{2} + \frac{i}{2} = i$.

Таким образом, $(iy)^3 = i - 3iy \Rightarrow y^3 - 3y + 1 = 0$.

Мы получили такой же многочлен для числа $y = 2\sin 10^\circ$, как и тригонометрическим способом выше.

НЕВОЗМОЖНОСТЬ ПОСТРОЕНИЯ ПРАВИЛЬНОГО ДЕВЯТИУГОЛЬНИКА

Заметим, что при построении правильного пятиугольника мы вывели $x = 2\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, но т.к. $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, можно построить угол 18° . Это означает, что можно построить правильный 20-угольник.

Заметим также, что можно построить угол 30° , пользуясь тем, что это угол в прямоугольном треугольнике, в котором один из катетов вдвое меньше гипотенузы (или как половину угла 60° равностороннего треугольника). Тогда можно

построить угол 15° , разделив его пополам, и следовательно, угол $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$, а также все углы, кратные ему. При этом невозможно построить угол 1° , (иначе можно было бы построить $10^\circ = 33^\circ + 1^\circ$) и, следовательно, угол 2° .

Также мы не можем построить угол 40° , т.к. иначе могли бы построить $10^\circ = 40^\circ - 30^\circ$. Это означает, что нельзя построить при помощи циркуля и линейки правильный девятиугольник, ведь $40^\circ = \frac{2\pi}{9}$.

На следующем уроке мы построим правильный 17-угольник и изучим вопрос, какие еще правильные n -угольники при простых n доступны для построения циркулем и линейкой.