

НЕВОЗМОЖНОСТЬ ПОСТРОЕНИЯ ПРАВИЛЬНОГО СЕМИУГОЛЬНИКА

ПРАВИЛЬНЫЙ СЕМИУГОЛЬНИК

Мы доказали, что с помощью циркуля и линейки можно построить правильный пятиугольник. Оказывается, что правильный семиугольник построить нельзя. Для доказательства этого факта мы изучим природу числа $\cos \frac{2\pi}{7}$, которое, как мы увидим, не может быть получено с помощью квадратичного калькулятора.

Рассмотрим единичную окружность на комплексной плоскости и вписанный в нее правильный семиугольник. Когда мы изучали комплексные числа, мы убедились, что все его вершины соответствуют следующим комплексным числам:

$1, \eta, \eta^2, \eta^3, \eta^4, \eta^5, \eta^6$, где $\eta = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$.

При этом $\eta^4 = \eta^{-3}, \eta^5 = \eta^{-2}, \eta^6 = \eta^{-1}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ

$$1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4 + \eta^5 + \eta^6 = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

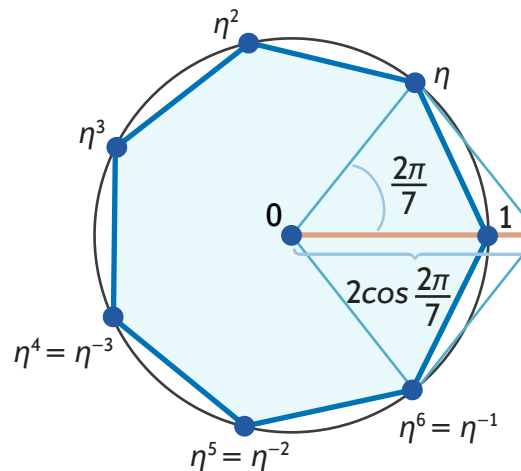
Обозначим левую часть равенства z .

Тогда: $z = 1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^{-3} + \eta^{-2} + \eta^{-1}$.

Но тогда $\eta z = \eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^{-2} + \eta^{-1} + 1 = z$.

Отсюда $z(\eta - 1) = 0$ и т.к. $\eta \neq 1, z = 0$. Доказано.

Геометрически это означает, что мы повернули вектор z на угол $\frac{2\pi}{7}$, и он при этом не изменился. Это возможно только если $z = 0$.



МИНИМАЛЬНЫЙ МНОГОЧЛЕН ДЛЯ $2\cos \frac{2\pi}{7}$

Рассмотрим выражение $x = \eta + \eta^{-1} = 2\cos \frac{2\pi}{7}$. Заметим, что $x^2 = (\eta + \eta^{-1})^2 = \eta^2 + 2 + \eta^{-2}$. Отсюда $x^2 - 1 = \eta^2 + 1 + \eta^{-2}$.

Далее, $x^3 = (\eta + \eta^{-1})^3 = \eta^3 + 3\eta + 3\eta^{-1} + \eta^{-3} = \eta^3 + \eta^{-3} + 3(\eta + \eta^{-1}) = \eta^3 + \eta^{-3} + 3x$, откуда $x^3 - 3x = \eta^3 + \eta^{-3}$.

Найдем сумму выражений $x, x^2 - 1, x^3 - 3x$:
 $x + x^2 - 1 + x^3 - 3x = x^3 + x^2 - 2x - 1 = \eta + \eta^{-1} + \eta^2 + \eta^{-2} + 1 + \eta^3 + \eta^{-3} = 0$.

Отсюда следует, что $x = 2\cos \frac{2\pi}{7}$ является корнем многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

МНОГОЧЛЕН $x^3 + x^2 - 2x - 1$ НЕРАЗЛОЖИМ

Нам осталось установить, что данный многочлен не разложим над $\mathbb{Q}$. Докажем от противного.

Пусть существует разложение над $\mathbb{Q}$
 $x^3 + x^2 - 2x - 1 = (\alpha x + \beta)(\gamma x^2 + \delta x + \rho)$. Тогда $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ — корень этого многочлена. Можем представить этот корень в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$.

Тогда: $m^3 + m^2n - 2mn^2 - n^3 = 0$.

Пусть число n имеет какой-нибудь простой делитель p . Тогда из уравнения $m^3 + p(\dots) = 0$. Следовательно, $m : p$, а это противоречит тому, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

Значит, $n = 1$ или $n = -1$, но тогда $x \in \mathbb{Z}$. Любой целый корень должен быть делителем свободного члена. Но $x \neq 1, -1$. Следовательно, никаких рациональных корней у нашего многочлена нет, и он неразложим.

Осталось добавить, что алгебраическое число $x = 2\cos \frac{2\pi}{7}$ имеет порядок 3, а значит $\dim \mathbb{Q}(2\cos \frac{2\pi}{7})/\mathbb{Q} = 3$.

Как и в случае с задачей об удвоении куба мы получаем ситуацию, когда число не попадает в башню полей, которые порождает квадратичный калькулятор. А следовательно, правильный семиугольник не может быть построен при помощи циркуля и линейки.