

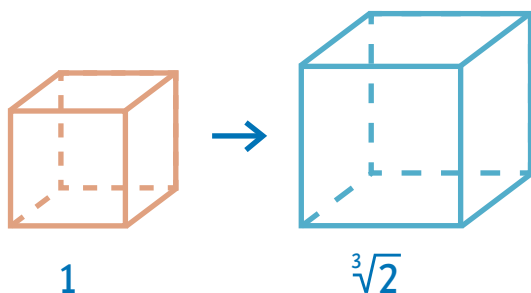
ЗАДАЧА ОБ УДВОЕНИИ КУБА

Существует 4 античные задачи на построение циркулем и линейкой:

- Задача об удвоении куба
- Трисекция угла
- Квадратура круга
- Построение правильного n - угольника

Эти задачи оставались нерешенными до 19-го века, когда, наконец, удалось доказать неразрешимость первых трех. О четвертой задаче и условиях ее разрешимости мы поговорим позже. мы рассмотрим все эти задачи, начиная с задачи об удвоении куба. Формулируется она так:

Дано ребро куба. Построить с помощью циркуля и линейки ребро куба вдвое большего объема.



Очевидно, что задача сводится к тому, чтобы построить отрезок, который по длине в $\sqrt[3]{2}$ раз превосходит данный.

И вот, спустя более 2000 лет, было доказано, что это сделать невозможно, исходя из природы числа $\sqrt[3]{2}$.

КВАДРАТИЧНЫЙ КАЛЬКУЛЯТОР И КВАДРАТИЧНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛЯ $\mathbb{Q}$

На прошлом уроке мы доказали, что построения циркулем и линейкой эквивалентны вычислениям на квадратичном калькуляторе $(+, -, \cdot, :, \sqrt{})$. Все результаты применения первых четырех арифметических операций в поле $\mathbb{Q}$ не выводят за его пределы. Мы установили, что расширение $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ имеет размерность 2. Сейчас мы вернемся к теории алгебраических чисел и изучим, какую размерность может иметь расширение поля $\mathbb{Q}$ при добавлении квадратных корней всех натуральных чисел.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Присоединение квадратных корней к полю $\mathbb{Q}$ дает расширения, размерности которых являются степенями двойки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

РАЗМЕРНОСТЬ ПОЛЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ $\sqrt[3]{2}$, КРАТНА 3

ЛЕММА

Пусть $\sqrt[3]{2} \in K \subset \mathbb{C}$, где K замкнуто относительно четырех арифметических операций. Тогда, если $\dim(K/\mathbb{Q}) = m < \infty$, то $m \vdots 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Если $\sqrt[3]{2} \in K$, то $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset K$. Получаем: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset K$.

Надо доказать, что размерность K над $\mathbb{Q}$ равна произведению размерностей $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ над $\mathbb{Q}$ и K над $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$:

$$\dim(K/\mathbb{Q}) = \dim(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}) \dim(K/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})).$$

Это так называемая теорема о башне полей.

Пусть $l = \dim(K/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$. Тогда базис K состоит из l элементов.

Пусть $1 = k_1, k_2, \dots, k_l$ — базис в K . Тогда $\forall k \in K$ существует представление $k = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \dots + \alpha_l k_l$, где $\alpha_i \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Можно представить все α_i в следующем виде:

$$\alpha_i = p_i + q_i \sqrt[3]{2} + r_i \sqrt[3]{4}, \text{ где } p_i, q_i, r_i \in \mathbb{Q}.$$

Тогда представление для k мы можем записать, перегруппировав слагаемые:

$$\begin{aligned} k &= p_1 k_1 + p_2 k_2 + \dots + p_l k_l + \\ &+ \sqrt[3]{2}(q_1 k_1 + q_2 k_2 + \dots + q_l k_l) + \\ &+ \sqrt[3]{4}(r_1 k_1 + r_2 k_2 + \dots + r_l k_l). \end{aligned}$$

Мы получили ровно $3l$ представителей K , через которые выражается любой его элемент с рациональными коэффициентами. Докажем теперь, что это и необходимое количество базисных элементов.

Предположим, что $k = 0$. Тогда все $\alpha_i = 0$.

$$p_i + q_i \sqrt[3]{2} + r_i \sqrt[3]{4} = 0 \quad p_i, q_i, r_i = 0.$$

Таким образом мы доказали, что $\dim(K/\mathbb{Q}) = 3l$.

Лемма доказана.

Мы получили, что число $\sqrt[3]{2}$ не может находиться в полях, размерность которых не делится на 3. А все расширения, содержащие корни натуральных чисел, имеют размерности, равные 2^k . Значит, $\sqrt[3]{2}$ не может в них содержаться, а значит, отрезок такой длины не может быть построен при помощи циркуля и линейки.