

ПОСТРОЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ. ЧАСТЬ 2

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

На прошлом уроке мы доказали, что любой отрезок, длина которого вычислима на координатной плоскости при помощи квадратичного калькулятора, может быть построен при помощи циркуля и линейки. Теперь мы докажем обратное утверждение, что координата любой точки, полученной в результате построения циркулем и линейкой на координатной плоскости, может быть выражена через рациональные числа и квадратные корни.

Если прямая проходит через две точки с рациональными координатами, то коэффициенты уравнения этой прямой можно задать рациональными числами.

В частности, если прямая проходит через начало координат и точку (x_0, y_0) , где $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}$, ее уравнение может быть записано $y_0x - x_0y = 0$.

Если прямая $ax + by = c$ проходит через точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , где $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$, то ее коэффициенты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 = c \\ ax_2 + by_2 = c \end{cases}$$

откуда $a = \frac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \in \mathbb{Q}$ и т.д.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ И ОКРУЖНОСТЕЙ

Рассмотрим все случаи получения точки в результате построения:

- пересечение двух прямых;
- пересечение прямой и окружности;
- пересечение двух окружностей.

Если точка получилась в результате пересечения двух прямых, то ее координаты — корень системы двух линейных уравнений с рациональными коэффициентами, а значит, есть рациональные числа.

Уравнение окружности с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом r имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

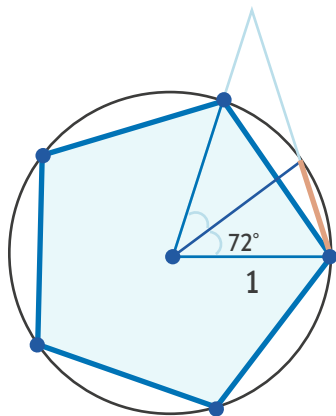
Точка пересечения прямой $ax + by = c$ и окружности может быть получена подстановкой в уравнение окружности одной переменной, выраженной через другую: $x = \frac{1}{a}(c - by)$.

В результате получится квадратное уравнение относительно y , корни которого находятся мощностями нашего квадратичного калькулятора.

Если мы ищем точки пересечения двух окружностей, то задача сводится к поиску точек пересечения одной из окружностей с прямой, содержащей общую хорду этих окружностей.

Таким образом, построения при помощи циркуля и линейки на координатной плоскости эквивалентны вычислениям на квадратичном калькуляторе.

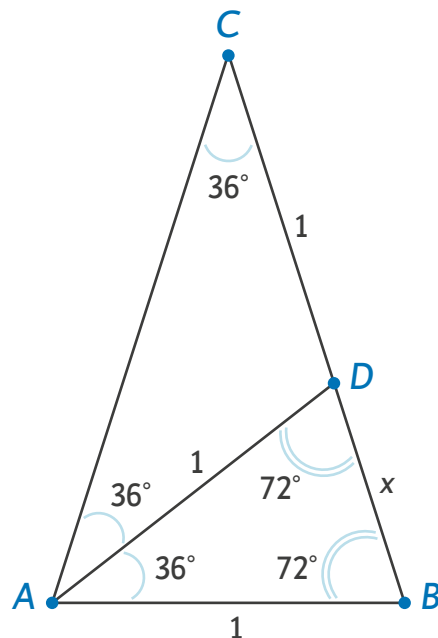
2 Далее мы рассмотрим пример, как можно это использовать.



ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

Будем строить правильный пятиугольник, вписанный в единичную окружность на координатной плоскости. Тогда его сторона есть хорда, стягивающая дугу $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$.

Это построение мы сведем к построению хорды, соответствующей половинному углу, равному 36° .



Для этого рассмотрим равнобедренный треугольник с углами 36° , 72° , 72° и основанием, равным 1. Проведем биссектрису угла при основании. Она отсекает треугольник, подобный исходному, с основанием, которое мы обозначим x (это как раз и есть искомая хорда). Из соотношения подобия получаем:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow x(1+x) = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет 2 корня, только один из которых положительный: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Этот отрезок мы можем построить!

На единичной окружности откладываем хорду длины $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Соответствующий центральный угол удваиваем (строим угол, равный данному). В результате получаем угол 72° , и соответствующая ему хорда будет стороной правильного пятиугольника. Задача решена.

На ближайших уроках мы поговорим о классических задачах на построение и узнаем о том, как было получено доказательство о неразрешимости таких задач, как удвоение куба и трисекция угла, а также узнаем, что не любой правильный n -угольник может быть построен при помощи циркуля и линейки.