

# СТЕПЕНЬ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ЧИСЛА. ЧАСТЬ 2

## МИНИМАЛЬНЫЙ МНОГОЧЛЕН

Какие мы знаем алгебраические числа, и корнями каких многочленов они являются?

$$\alpha = \sqrt{2} \quad f(x) = x^2 - 2$$

$$\alpha = \sqrt{3} \quad f(x) = x^2 - 3$$

$$\alpha = \sqrt[3]{2} \quad f(x) = x^3 - 2$$

$$\alpha = \sqrt[5]{7} \quad f(x) = x^5 - 7$$

При этом не все алгебраические числа, являющиеся корнями многочленов с целыми коэффициентами, выражаются в радикалах. Например, уравнение  $x^5 - 3x + 3 = 0$  из соображений непрерывности имеет по крайней мере один вещественный корень, но Галуа доказал, что это уравнение неразрешимо в радикалах.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Степенью алгебраического числа  $\alpha$  является минимально возможная степень ненулевого многочлена  $f \in \mathbb{Z}[x]$  такого, что  $f(\alpha) = 0$ .

Пусть  $\alpha = \sqrt{2}$ . Рассмотрим многочлен  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ . Заметим, что  $\alpha$  — корень этого многочлена:  
 $f(\sqrt{2}) = 4 - 8 + 4 = 0$ .

$f(x)$  — многочлен 4-й степени, однако мы знаем, что число  $\sqrt{2}$  — алгебраическое число степени 2, т.е. является корнем многочлена 2-й степени  $g(x) = x^2 - 2$ . Таким образом,  $g(x)$  — минимальный многочлен для  $\alpha = \sqrt{2}$ .

### ТЕОРЕМА

$$\deg \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}.$$

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Значит,  $\alpha = \frac{m}{n}$ . Возьмем  $f(x) = nx - m$ .

Пусть  $\alpha$  — корень многочлена 1-й степени  $f(x) = ax + b$ .

Тогда  $a\alpha + b = 0 \quad \alpha = -\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ . Доказано.

## БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ

Пусть  $\mathbb{Q} \subset k \subset K \subset \mathbb{R}$ .

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Базисом поля  $K$  над  $k$  называется такой набор чисел  $z_1, z_2, \dots, z_l \in K$ , что любое число  $z \in K$  представимо в виде  $z = z_1 p_1 + z_2 p_2 + \dots + z_l p_l$ , где  $p_i \in k$ .

Сами  $z_1, z_2, \dots, z_l$  линейно независимы, т.е. все такие выражения различны.

### ТЕОРЕМА

Все базисы  $K/k$  имеют одно и то же число элементов.

Эту теорему мы докажем на следующем уроке. А пока сформулируем корректное определение размерности поля  $K$  над полем  $k$ :

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Размерность  $[K: k] = \dim(K/k)$  равна количеству элементов в базисе  $K/k$ .

## РАЗМЕРНОСТЬ И СТЕПЕНЬ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА

### ТЕОРЕМА

Степень любого алгебраического числа  $\alpha$  равна  $\dim(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ .

Т.е.  $\dim(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$  совпадает со степенью минимального многочлена алгебраического числа  $\alpha$ .

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Сначала проведем доказательство для  $\alpha = \sqrt[3]{2}$ , а на следующем уроке обобщим для любого  $\alpha$ .

Докажем, что многочлен  $x^3 - 2$  действительно минимальный для  $\alpha = \sqrt[3]{2}$ , а также, что  $\mathbb{Q}(\alpha) = \{p + q\alpha + r\alpha^2, p, q, r \in \mathbb{Q}\}$ .

### УТВЕРЖДЕНИЕ

Ни один многочлен 2-й или 1-й степени из  $\mathbb{Q}[x]$  не имеет своим корнем  $\alpha = \sqrt[3]{2}$ .

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ

Про многочлены 1-й степени уже доказано выше.

Пусть существует многочлен  $f(x) = x^2 + q_1x + q_0$  такой, что  $f(\sqrt[3]{2}) = 0$ . Тогда разделим  $x^3 - 2$  на  $f(x)$ :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2 & x^2q_1x + q_0 \\ \hline x^3 + q_1x^2 + q_0x & x - q_1 \\ \hline -q_1x^2 - q_0x - 2 & \\ -q_1x^2 - q_1^2x - q_1q_0 & \\ \hline q_1^2x + q_1q_0 - q_0x - 2 & \text{— остаток.} \end{array}$$

Получаем

$$x^3 - 2 = (x^2 + q_1x + q_0)(x - q_1) + (q_1^2 - q_0)x + q_1q_0 - 2$$

Подставим в это равенство  $x = \sqrt[3]{2}$ :

$$0 = 0 \cdot (\sqrt[3]{2} - q_1) + (q_1^2 - q_0)\sqrt[3]{2} + q_1q_0 - 2.$$

Тогда должно быть выполнено:

$$(q_1^2 - q_0)\sqrt[3]{2} + q_1q_0 - 2 = 0.$$

Но корнем линейного уравнения с рациональными коэффициентами может быть только рациональное число, каковым  $\sqrt[3]{2}$  не является. Получаем противоречие.

Утверждение доказано.

Итак, мы доказали, что многочлен  $x^3 - 2$  — минимальный для  $\alpha = \sqrt[3]{2}$ . На следующем уроке продолжим доказательство теоремы.