

1 СТЕПЕНЬ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ЧИСЛА

$\mathbb{Z}[\alpha]$ И $\mathbb{Q}(\alpha)$ В СЛУЧАЕ $\alpha = \sqrt{2}$

Пусть $\alpha = \sqrt{2}$. Определим размерность $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Рассмотрим значение многочлена любой степени с целыми коэффициентами в точке $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} m_0 + m_1\sqrt{2} + m_2(\sqrt{2})^2 + m_3(\sqrt{2})^3 + m_4(\sqrt{2})^4 + \dots = \\ = m_0 + m_1\sqrt{2} + m_2 \cdot 2 + m_3 \cdot 2\sqrt{2} + m_4 \cdot 4 + \dots \end{aligned}$$

Мы видим, что получается выражение вида $n + l\sqrt{2}$, где $n, l \in \mathbb{Z}$.

При этом сумма и произведение любых выражений такого вида тоже является выражением такого вида. Таким образом, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{n + l\sqrt{2}, n, l \in \mathbb{Z}\}$.

В качестве набора параметров для описания любого числа из $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ можно взять два элемента: 1 и $\sqrt{2}$. Таким образом, размерность $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ равна 2 .

Числа 1 и $\sqrt{2}$ можно назвать базисом по аналогии с векторами в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}}, a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Докажем, что $\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = p + q\sqrt{2}$ для некоторых $p, q \in \mathbb{Q}$.

Избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}.$$

Знаменатель не равен нулю (иначе число $\sqrt{2}$ было бы рациональным), а обе дроби являются рациональными числами как частное рациональных чисел.

Таким образом, базисом минимального поля, содержащего $\sqrt{2}$, также являются два элемента 1 и $\sqrt{2}$, а его размерность равна 2 .

Заметим, что $\sqrt{2}$ является корнем многочлена $f(x) = x^2 - 2$. Это многочлен 2 -й степени, и это минимальная степень многочлена над полем $\mathbb{Q}$, корнем которого может быть число $\sqrt{2}$.

$\mathbb{Z}[\alpha]$ И $\mathbb{Q}(\alpha)$ В СЛУЧАЕ $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Заметим, что $\mathbb{Z}[\alpha] \neq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, т.к. $\alpha \notin \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Кроме того, $\mathbb{Z}[\alpha]$ должно содержать $\alpha^2 = \frac{2}{9}$.

Заметим, что $\sqrt{2}$ является целым алгебраическим числом, т.к. является корнем многочлена $x^2 - 2$ со старшим коэффициентом, равным 1 , а $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ не является целым алгебраическим числом.

Таким образом, определить размерность кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$ не так просто.

Что касается $\mathbb{Q}(\alpha)$, то очевидно $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, а значит, $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$\mathbb{Z}[\alpha]$ И $\mathbb{Q}(\alpha)$ В СЛУЧАЕ $\alpha = \sqrt[3]{2}$

Пусть $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Тогда $\alpha^2 = \sqrt[3]{4}$, $\alpha^3 = 2$, а более высокие степени будут выражаться через эти три числа с целыми коэффициентами. Присоединяя $\alpha = \sqrt[3]{2}$, к кольцу $\mathbb{Z}$, мы должны присоединить все числа вида

$$\{n + l\sqrt[3]{2} + m\sqrt[3]{2^2}, n, l, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис получившегося кольца состоит из 3-х чисел.

Аналогично

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{p + q\sqrt[3]{2} + r\sqrt[3]{2^2}, p, q, r \in \mathbb{Q}\}.$$

$\mathbb{Z}[\alpha]$ И $\mathbb{Q}(\alpha)$ В СЛУЧАЕ $\alpha = \pi$

Пусть $\alpha = \pi$. Оказывается, никакие степени числа π не могут быть выражены через более низкие степени этого числа.

УТВЕРЖДЕНИЕ

$$\mathbb{Z}[\pi] = \{f(\pi), f \in \mathbb{Z}[x]\}.$$

Минимальное кольцо, содержащее $\mathbb{Z}$ и π , состоит из множества значений при $x = \pi$ всех возможных многочленов с целыми коэффициентами. Все эти значения строго различны, и $g(\pi) \neq 0 \forall g \in \mathbb{Z}[x]$.

Это свойство числа π называется **трансцендентностью**.

$$\mathbb{Q}(\pi) = \left\{ \frac{f(\pi)}{g(\pi)}, f, g \in \mathbb{Z}[x] \right\} \text{ — минимальное поле,}$$

содержащее $\mathbb{Q}$ и π . Оно имеет бесконечную размерность.

Число α называется алгебраическим, если существует многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого оно является. Можно переформулировать, что α — алгебраическое, если оно является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами со старшим коэффициентом, равным 1 (это просто два разных эквивалентных подхода).