

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА: ПРОДОЛЖЕНИЕ

ТЕОРЕМА О ПЛОТНОСТИ

ТЕОРЕМА

Пусть α — иррациональное число. Тогда множество $\{A = m + n\alpha, m, n \in \mathbb{Z}\}$ не имеет точной нижней границы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмем числовую прямую и намотаем ее на окружность, длина которой равна 1. Все целые точки попадут в одну и ту же точку на этой окружности (совпадут с точкой 0). А что произойдет с нашим множеством A ?

УТВЕРЖДЕНИЕ 1

При таком наматывании образ множества достижимости есть множество $\{0, \pm \alpha, \pm 2\alpha, \dots\}$. Действительно, целые части всех элементов A будут «сгорать».

УТВЕРЖДЕНИЕ 2

Таких точек бесконечно много, и все они различны.

Докажем это утверждение от противного. Пусть оказалось, что на окружности совпали две точки из этого множества:

$l\alpha = r\alpha$ при $l \neq r$. Тогда их прообразы на прямой различались на некоторое целое число: $l\alpha = r\alpha + m$.

Но тогда, выражая α , получим $\alpha = \frac{m}{l-r} \in \mathbb{Q}$, противоречие!

Утверждение доказано.

ВОПРОС:

Как может выглядеть множество, которое бесконечно и лежит на одной окружности?

Должно быть верно следующее утверждение:

$\forall \varepsilon \exists l, r \in \mathbb{Q}$ такие, что $|l\alpha - r\alpha| < \varepsilon$.

Докажем от противного. Пусть, например, на промежутке одна триллионная нет ни одного числа, кратного α . Тогда разбиваем всю окружность на триллион отрезков. В каждом не может быть больше одного кратного α , а значит, всего их не более триллиона. А мы знаем, что их бесконечно много. Противоречие.

Итак, на нашей окружности выполнено $l\alpha - r\alpha < \varepsilon$ при некоторых $l > r$, а значит на прямой выполнено $(l\alpha - r\alpha) - m < \varepsilon$, где m — любая целая точка. В частности, в любой сколь угодно малой окрестности точки 0 обязательно содержатся элементы множества A .

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ

В любой сколь угодно малой окрестности 0 существует число вида $m + n\sqrt{2}$.

СТРОЕНИЕ $\mathbb{Z}[\alpha]$

Пусть α — иррациональное число.

ЗАДАЧА 1

Построить $\mathbb{Z}[\alpha]$ — минимальное кольцо, содержащее множество целых чисел $\mathbb{Z}$ и число α .

ЗАДАЧА 2

Построить $\mathbb{Q}(\alpha)$ — минимальное поле, содержащее множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и число α .

$\mathbb{Z}[\alpha]$ должно содержать все степени α , а также любое число вида $m_0 + m_1\alpha + m_2\alpha^2 + m_3\alpha^3 + \dots + m_k\alpha^k$ для любых $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим любой многочлен с целыми коэффициентами $m_0 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + \dots + m_kx^k$. Подставляя вместо x любой элемент $\mathbb{Z}[\alpha]$, мы будем снова получать элемент из $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Для фиксированного числа α рассмотрим значения всевозможных многочленов с целыми коэффициентами при $x = \alpha$:

$$\{f(\alpha), f \in \mathbb{Z}[x]\} = \{m_0 + m_1\alpha + m_2\alpha^2 + m_3\alpha^3 + \dots + m_k\alpha^k, \forall k \forall m_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Утверждается, что это множество является кольцом.

Понятно, что сумма и произведение таких выражений будет иметь такой же вид.

ТЕОРЕМА

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{f(\alpha), f \in \mathbb{Z}[x]\}.$$

ТЕОРЕМА

Так как $\mathbb{Z}[\alpha]$ должно содержать данное кольцо, но при этом является минимальным кольцом, содержащим α , эти кольца совпадают.

Теорема доказана.

СТРОЕНИЕ $\mathbb{Q}(\alpha)$

Теперь рассмотрим $\mathbb{Q}(\alpha)$ — минимальное поле, содержащее $\mathbb{Q}$ и α .

ТЕОРЕМА

$\mathbb{Q}(\alpha) = \left\{ \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}, f, g \in \mathbb{Q}[x], g(\alpha) \neq 0 \right\}$, где $\mathbb{Q}[x]$ — множество всех многочленов с рациональными коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Очевидно, что $\left\{ \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}, f, g \in \mathbb{Q}[x], g(\alpha) \neq 0 \right\}$ — поле,

и $\mathbb{Q}(\alpha)$ должно содержать любой его элемент.

Но $\mathbb{Q}(\alpha)$ — минимальное поле, содержащее α , а значит, эти поля совпадают.

Теорема доказана