

1 АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Если мы отметим на числовой прямой все целые числа, а затем все дроби, мы получим всюду плотное множество точек. Однако на прямой останутся точки, которые не принадлежат этому множеству, например, число $\sqrt{2}$.

ТЕОРЕМА

Пусть $\frac{m}{n} > 0$ — несократимая дробь. Если либо $m \neq l^k$, либо $n \neq s^k$, то $\sqrt[k]{\frac{m}{n}}$ является иррациональным числом.

Эта теорема сразу нам дает огромное количество новых чисел.

Например, число $\frac{25}{17}$. Корни любой степени из этого числа иррациональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ЛЕММА

Любые две несократимые дроби обозначают различные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ

От противного. Пусть $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, при этом $a_1 \neq a_2$.

Тогда по ОТА существует хотя бы один простой множитель, на который различаются разложения чисел a_1 и a_2 . Например, $a_1 = 7^4 \cdot \bar{a}_1$, $a_2 = 7^5 \cdot \bar{a}_2$, причем $\bar{a}_1, \bar{a}_2, b_1, b_2$ не делятся на 7.

Тогда: $7^4 \cdot \bar{a}_1 \cdot b_2 = 7^5 \cdot \bar{a}_2 \cdot b_1$, что противоречит ОТА.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы также проведем от противного.

Пусть $\sqrt[k]{\frac{m}{n}} = \frac{t}{v}$ — несократимая дробь. Тогда $\frac{m}{n} = \frac{t^k}{v^k}$.

Но m, n не являются одновременно k — ми степенями, значит, мы получили равенство несократимых дробей, что противоречит лемме.

Теорема доказана.

КУЗНЕЧИК С ПРЫЖКАМИ 1 И α

Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$ — иррациональное число.

Пусть на числовой прямой есть кузнечик, который может совершать прыжки длины 1 и α . Рассмотрим множество точек, куда может попасть этот кузнечик:

$$A = \{m + n\alpha, m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Заметим, что «рациональные» кузнечики (прыжки которых есть дроби) могут попадать в 0 нетривиальным образом.

Например, кузнечик с прыжками на 5 и 7 может совершить 7 прыжков на 5 вправо и 5 прыжков на 7 влево.

А «иррациональные» (с прыжками 1 и α) не могут.

ТЕОРЕМА 2

Если $\alpha \notin \mathbb{Q}$, то множество мест, куда попадает кузнечик с прыжками длины 1 и α $A = \{m + n\alpha, m, n \in \mathbb{Z}\}$ состоит из попарно различных чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

От противного. Пусть $m + n\alpha = k + l\alpha$ при некоторых $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$. Тогда $m - k = \alpha(n - l)$. Если $l - n = 0$, то $l = n$. Тогда $m - k = 0 \Rightarrow m = k$. Если $l - n \neq 0$, можем поделить на это выражение. Тогда $\alpha = \frac{m - k}{n - l}$, а это рациональное число. Противоречие.

Теорема доказана.