

ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Рассмотрим координатную плоскость и базисные векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Мы будем изучать следующее отображение:

- 1) Проведем прямую $x = 1$.
- 2) Через произвольную точку A этой прямой и начало координат проведем прямую l .
- 3) Возьмем произвольное линейное отображение f , которому соответствует матрица $f \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- 4) Смотрим, на какую прямую переходят при этом отображении все векторы прямой l (они будут коллинеарны, т.к. $f(\lambda \bar{v}) = f(\lambda) \bar{v}$).
- 5) Прямую l' , являющуюся образом прямой l , пересекаем с прямой $x = 1$.
- 6) Полученная точка является результатом нашего отображения, примененного к точке A .

ЗАМЕЧАНИЕ

В результате такого отображения прямая $x = 1$ переходит в себя.

Такие отображения называются **дробно-линейными**.

ПРИМЕР ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим следующее отображение:

$$f(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$$

$$f(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 - \bar{e}_2.$$

Этому отображению соответствует матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим произвольную точку с прямой $x = 1$. Пусть ее координаты $(1, y)$. Радиус-вектор, который ей соответствует, раскладывается по базису следующим образом:

$$\bar{e}_1 + y\bar{e}_2.$$

Найдем образ этого вектора при преобразовании f :

$$\begin{aligned} f(\bar{e}_1 + y\bar{e}_2) &= f(\bar{e}_1) + yf(\bar{e}_2) = \\ &= \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + y(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) = (1 + y)\bar{e}_1 + (2 - y)\bar{e}_2. \end{aligned}$$

Мы получили следующее отображение:

$$(1, y) \rightarrow \left(1, \frac{2 - y}{1 + y}\right).$$

ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДРОБНО- ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть теперь f — произвольное линейное отображение,

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим точку с координатами $(1, x)$ и найдем образ радиус-вектора, ей соответствующего, при отображении f .

$$(1, x) \rightarrow f(\bar{e}_1) + xf(\bar{e}_2) = a\bar{e}_1 + c\bar{e}_2 + x(b\bar{e}_1 + d\bar{e}_2) = (a + bx)\bar{e}_1 + (c + dx)\bar{e}_2.$$

Таким образом,

$$(1, x) \rightarrow \left(1, \frac{c + dx}{a + bx}\right).$$

О ВЫРОЖДЕНИЯХ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ВОПРОС

Почему мы называем дробно-линейное отображение преобразованием, хотя есть точки, у которых нет образа? (например, точка $(1; -1)$ в нашем примере, а в общем случае точка $(1; -\frac{a}{b})$). Однако, если рассматривать так называемую **проективную прямую** т.е. добавить бесконечно удаленную точку ∞ , то можно доопределить наше отображение:

$$(1, -\frac{a}{b}) \rightarrow \infty;$$

$$\infty \rightarrow (1, \frac{d}{b}).$$

К тому же можно указать обратное к любому дробно-линейному отображению.

УПРАЖНЕНИЕ

Найдите обратное к дробно-линейному преобразованию, рассмотренному в примере.

Что же происходит в случае, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$?

$ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc = 0$ или равны нулю 2 элемента в одной строке или столбце. В обоих случаях дробно-линейное преобразование вырождается.

Рассмотрим 1-й случай.

Итак, $ad = bc = 0$. Следовательно, $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \mu$,

где μ — некоторое число $\Rightarrow c = \mu a, d = \mu b$.

$$\text{Тогда } \forall x \ f(x) = \frac{c + dx}{a + bx} = \frac{\mu a + \mu bx}{a + bx} = \mu = \text{const.}$$

Получаем, что все точки прямой схлопываются в точку μ . Аналогично получается и во 2-м случае.

КОМПОЗИЦИЯ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть есть два дробно-линейных преобразования:

$$f \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow F(x) = \frac{c + dx}{a + bx}$$

$$g \sim \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \rightarrow G(y) = \frac{\gamma + \delta y}{\alpha + \beta y}$$

Рассмотрим их композицию:

$$F \circ G(y) = \frac{c + d \frac{\gamma + \delta y}{\alpha + \beta y}}{a + b \frac{\gamma + \delta y}{\alpha + \beta y}} = \frac{c\alpha + d\gamma + (c\beta + d\delta)y}{a\alpha + b\gamma + (a\beta + b\delta)y}.$$

3

Таким образом, композиция двух дробно-линейных преобразований также является дробно-линейным преобразованием. При этом матрица соответствующего линейного отображения есть результат произведения матриц f и g :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

Матрицы, соответствующие всем возможным (невырожденным) дробно-линейным преобразованиям образуют группу, которая обозначается $PSL_2(\mathbb{R})$ и совпадает с $L_2(\mathbb{R})$ с точностью до всех кратных матриц (две матрицы, элементы которых кратны, задают одно и тоже дробно-линейное преобразование).

ПОДГРУППА, ИЗОМОРФНАЯ S^3

Во время изучения группы перестановок мы уже познакомились со следующей группой дробно-линейных преобразований:

$$Id: x \rightarrow x;$$

$$x \rightarrow \frac{1}{x};$$

$$x \rightarrow 1 - x;$$

$$x \rightarrow \frac{1}{1 - x};$$

$$x \rightarrow 1 - \frac{1}{x};$$

$$x \rightarrow \frac{x}{1 - x}.$$

Действительно, эти 6 дробно-линейных преобразований образуют подгруппу.

УПРАЖНЕНИЕ

Составьте таблицу композиций и установите изоморфизм с группой перестановок на 3-х символах S^3 .

На этом мы заканчиваем знакомство с абстрактной линейной алгеброй и начиная со следующего урока переходим к изучению алгебраических чисел.