

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА: УРОЖАЙ. ЧАСТЬ 2

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА КАК МАТРИЦЫ

Сопоставим комплексному числу $z = a + bi$ матрицу $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Как мы помним, произведение комплексных чисел определяется следующим образом:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Если перемножить соответствующие этим комплексным числам матрицы, получим матрицу, соответствующую произведению по такому же правилу:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы получили изоморфизм поля комплексных чисел и множества матриц 2×2 определенного вида.

Заметим, что умножение таких матриц коммутативно.

ВОПРОС

Какому линейному отображению соответствует матрица вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$?

Возьмем базис $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и посмотрим, куда он переходит при таком отображении.

$$f(\bar{e}_1) = a\bar{e}_1 - b\bar{e}_2,$$

$$f(\bar{e}_2) = b\bar{e}_1 + a\bar{e}_2.$$

На языке комплексных чисел базис соответствует числам 1 и i , умножая которые на число $z = a + bi$ мы получим то же самое:

$$1 \rightarrow a + bi,$$

$$i \rightarrow i(a + bi) = -b + ai.$$

Векторы $f(\bar{e}_1)$ и $f(\bar{e}_2)$ перпендикулярны, а длины их равны.

Таким образом, линейное отображение f есть поворотная гомотетия с коэффициентом $\sqrt{a^2 + b^2}$ на угол $\arctan \frac{a}{b}$.

Определителем матрицы, соответствующей f , будет норма комплексного числа $z = a + bi$.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

На плоскости можно умножить два вектора как комплексные числа:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2);$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

В этом случае результатом произведения векторов является вектор:

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Помимо этого существует так называемое **скалярное произведение** векторов.

Пусть $\bar{v} = (a, b)$, $\bar{w} = (\alpha, \beta)$. Тогда:

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = a\alpha + b\beta \text{ — скалярное произведение.}$$

Скалярное произведение векторов — это функция, которая в пространстве любой размерности сопоставляет двум векторам некоторое число — сумму произведений соответствующих координат.

ВОПРОС: Каков геометрический смысл этого числа?

ТЕОРЕМА

Скалярное произведение векторов равно произведению их длин и косинуса угла между ними.

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{w}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Заметим, что скалярное произведение линейно, а также не зависит от порядка аргументов (симметрично).

В частности,

$$\langle \lambda \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \lambda \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Любой вектор на плоскости может быть представлен в виде произведения его модуля и вектора единичной длины:

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$, где φ — угол, который данный вектор образует с положительным направлением оси абсцисс.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \left\langle \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) = \\ &= |\vec{v}| |\vec{w}| \cos (\varphi - \psi). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Так как $\cos 90^\circ = 0$, скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю.

Так как $\cos 0^\circ = 1$, скалярное произведение вектора самого на себя есть квадрат его длины:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}|^2.$$

Если $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Заметим, что доказанная нами теорема верна в пространстве любой размерности. Так как косинус угла принимает значения в пределах от -1 до 1 , то в пространстве $\mathbb{R}^n$ при любом n для любых двух векторов $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\vec{w} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ выполнено:

$$-1 \leq \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}} \leq 1$$

Это неравенство Коши-Буняковского.