

ТЕОРЕМА ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

ТЕОРЕМА

Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей.

На прошлом уроке мы установили, что модуль определителя матрицы линейного отображения показывает, во сколько раз изменяется площадь при данном линейном отображении. Тогда очевидно, что композиция линейных отображений, которой соответствует произведение соответствующих матриц, меняет площадь дважды.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Нам нужно доказать, что $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma)(ad - bc)$.

Рассмотрим функцию, которая двум векторам $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ сопоставляет определитель произведения соответствующей матрицы и матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\Psi \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ

Функция Ψ удовлетворяет условиям кососимметричности и билинейности.

$$\begin{aligned} 1) \Psi \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right] &= (\alpha a + \beta c)(\gamma b + \delta d) - (\gamma a + \delta c)(\alpha b + \beta d) = \\ &= -\Psi \left[\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \right] \text{ — проверяется непосредственно;} \end{aligned}$$

2) Если представить $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, можно путем преобразований получить, что

$$\Psi \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right] = \Psi \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right] + \Psi \left[\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right].$$

Утверждение доказано.

По доказанному нами на прошлом уроке утверждению

$$\Psi \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right] = (\alpha\delta + \beta\gamma)\Psi(e_1, e_2).$$

По определению функции Ψ

$$\Psi(e_1, e_2) = \Psi \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc,$$

а значит, теорема доказана.

ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ОБЪЕМ

Пусть $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — линейное отображение, которому соответствует матрица, составленная из векторов u, v, w .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Тогда по аналогии с плоскостью можно рассматривать функцию трех векторов $\Phi(u, v, w)$, которая удовлетворяет свойствам кососимметричности и полилинейности.

Как и в случае плоскости, $\Phi(u, v, w)$ можно представить как линейную комбинацию $\Phi(e_i, e_j, e_k)$, где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Получим 27 слагаемых, только 6 из которых не равны нулю, а именно содержащие $\Phi(e_1, e_2, e_3)$:

$$\Phi(u, v, w) = \Phi(e_1, e_2, e_3)(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}).$$

Выражение, стоящее в скобках, есть определитель матрицы, а $\Phi(e_1, e_2, e_3) = 1$.

С другой стороны, объем параллелепипеда, образованного векторами u, v, w , тоже обладает свойствами кососимметричности и полилинейности.

Таким образом, определитель матрицы 3×3 линейного отображения f будет равен ориентированному объему параллелепипеда, образованного векторами u, v, w .

Знак определителя соответствует взаимному расположению в пространстве этой тройки векторов.

ТРИГОНОМЕТРИЯ И МАТРИЦЫ

Ранее мы вывели формулы синуса суммы и косинуса суммы на основе теории комплексных чисел. Сейчас мы получим эти формулы с помощью матриц.

Пусть линейное отображение $f = R_\varphi^\circ$ есть поворот относительно начала координат на угол φ . Возьмем базис

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и запишем в нем матрицу } f:$$

$$f(e_1) = \cos \varphi e_1 - \sin \varphi e_2,$$

$$f(e_2) = \sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2. \text{ Следовательно,}$$

$$R_\varphi^\circ \sim \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Рассмотрим композицию поворотов относительно начала координат на угол φ и на угол ψ . С одной стороны, матрица композиции

$$R_\varphi^\circ \circ R_\psi^\circ \sim \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix}$$

С другой стороны, матрица композиции линейных отображений есть произведение соответствующих матриц:

$$\begin{aligned} R_\varphi^\circ \circ R_\psi^\circ &\sim \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем формулы синуса суммы и косинуса суммы:

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi$$

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi$$