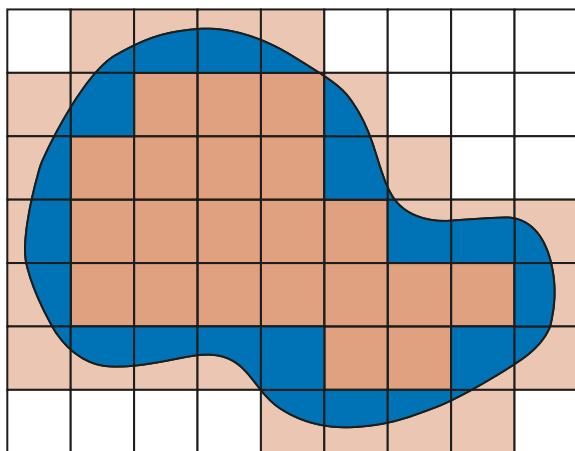


1 ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ И ПЛОЩАДЬ

ПОНЯТИЕ ПЛОЩАДИ

Пусть дана произвольная замкнутая фигура на плоскости. Площадь фигуры можно рассматривать как массу краски, которая бы понадобилась, чтобы залить эту фигуру. Эту массу краски мы можем сравнивать с той, которая нужна для заливки каких-нибудь элементарных фигур, например, квадратов 1×1 .

Пусть на плоскости задана система координат. Мы можем разбить плоскость на квадраты со стороной, равной единичному отрезку. Рассмотрим две величины: суммарную площадь квадратиков, целиком лежащих внутри контура фигуры и суммарную площадь квадратиков, имеющих с фигурой непустое пересечение.

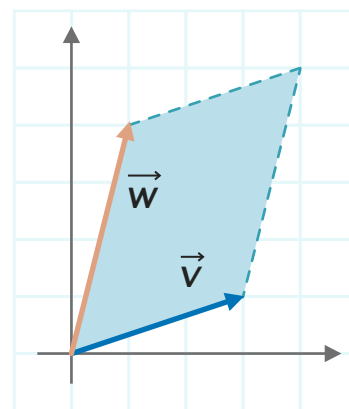


Значение площади фигуры заключено между этими двумя величинами, которые являются для него, соответственно, оценкой снизу и оценкой сверху.

Мы постулируем, что если измельчать сетку квадратиков (например, переходить от квадратных сантиметров к квадратным миллиметрам и т.д.), разность между верхней и нижней оценками площади фигуры будет стремиться к нулю, и в пределе все три значения совпадут.

СВЯЗЬ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ И ПЛОЩАДИ

Пусть $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ — произвольные векторы на плоскости. Тогда, если векторы не коллинеарны, они являются сторонами параллелограмма. Будем рассматривать площадь параллелограмма как функцию векторов, его образующих. Если векторы коллинеарны, то площадь соответствующего параллелограмма равна нулю.



Рассмотрим две функции от пары векторов $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$:

$$\Phi_1\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

определитель матрицы, образованной данной парой векторов;

$\Phi_1\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$ — площадь параллелограмма, образованного данной парой векторов на плоскости, взятой со знаком «+», если векторы ориентированы против часовой стрелки, и со знаком «-» иначе.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Обе функции Φ_1 и Φ_2 обладают парой свойств:

- 1) $\Phi(v, w) = -\Phi(w, v)$ (свойство кососимметричности);
- 2) $\Phi(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha\Phi(v_1, w) + \beta\Phi(v_2, w)$ (свойство билинейности, т. е. линейности по каждому из двух аргументов).

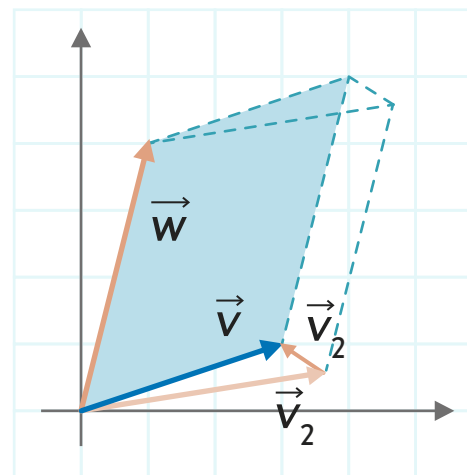
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Проверим сначала для функции площади.

- 1) Выполнено по определению.
- 2) Отметим, что при удлинении одного из векторов в некоторое количество раз во столько же раз увеличится площадь соответствующего параллелограмма:

$$\Phi_2(\alpha v, w) = \alpha\Phi_2(v, w).$$

Пусть $v = v_1 + v_2$. Рассмотрим параллелограммы, образованные парами векторов v_1 и w , v_2 и w .



С помощью перекладывания равных площадей на координатной плоскости можно убедиться, что площадь параллелограмма, образованного парой векторов v и w является разностью площадей этих двух параллелограммов, что соответствует тому, что одна из площадей действительно должна быть взята со знаком «-». Отсюда имеем:

$$\Phi_2(v_1 + v_2, w) = \Phi_2(v_1, w) + \Phi_2(v_2, w).$$

Значит, оба свойства для $\Phi_2(v, w)$ выполнены.

Теперь проверим их выполнение для $\Phi_1(v, w)$.

$$1) \Phi_1\left(\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -\Phi_1\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right).$$

$$2) \begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b \\ c_1 + c_2 & d \end{vmatrix} = a_1d + a_2d - bc_1 - bc_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}.$$

Таким образом, и для определителя свойства выполнены.

Итак, имеется две функции, удовлетворяющие обоим свойствам. Далее мы докажем, что функция двух векторов, обладающая этими свойствами, единственна с точностью до постоянного множителя. Для этого разложим векторы по базису.

Пусть $v = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Распишем:

$$\begin{aligned}\Phi(v, w) &= \Phi\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = \Phi\left(a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = \\ &= ab\Phi(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + ad\Phi(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + cb\Phi(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + cd\Phi(\bar{e}_2, \bar{e}_2)\end{aligned}$$

По свойству кососимметричности должно быть выполнено

$$\Phi(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 0, \quad \Phi(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = 0$$

$$\text{Значит, } \Phi(v, w) = \Phi(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Заметим, что параллелограмм, образованный базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, есть единичный квадрат площади 1, а определитель матрицы, составленной векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, тоже равен 1 (это единичная матрица!).

Поэтому с учетом $\Phi(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \Phi_1(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \Phi_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 1$, получаем, что $\Phi(v, w) = ad - bc$.

ТЕОРЕМА

Пусть $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейное отображение, $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — базис, в котором матрица f имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Тогда площадь параллелограмма, образованного векторами $f(\bar{e}_1)$ и $f(\bar{e}_2)$, равна модулю определителя матрицы A .

ЗАМЕЧАНИЕ

Мы убедились, что определитель матрицы положителен, если отображение f не меняет ориентации векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ и отрицателен иначе.

Таким образом, определитель равен **ориентированной** площади, т.е. значению площади, взятому с соответствующим знаком.