

1 АРИФМЕТИКА МАТРИЦ. ЧАСТЬ 2

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ И ГРУППА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Пример 1

Рассмотрим произведение матриц 2×2 специального вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } x, y \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, множество матриц такого вида по умножению образует группу, изоморфную группе вещественных чисел по сложению.

Пример 2

Рассмотрим произведение диагональных матриц 2×2 :

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}, \text{ где } x, y \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, множество матриц такого вида образует группу по умножению, изоморфную группе по умножению вещественных чисел.

Заметим, что в примерах 1, 2 умножение матриц коммутативно, хотя, в общем случае это не так.

Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

АССОЦИАТИВНОСТЬ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

На примере матриц 2×2 можно убедиться в том, что умножение удовлетворяет свойству ассоциативности:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

К тому же для любых линейных отображений ассоциативность имеет место, как и для любых отображений, что доказано ранее в нашем курсе.

ОБРАЗУЕТ ЛИ МНОЖЕСТВО МАТРИЦ ГРУППУ?

Введем обозначение $M_2(\mathbb{R})$ для множества матриц 2×2 с вещественными коэффициентами.

ВОПРОС

Является ли $M_2(\mathbb{R})$ группой по умножению или содержит в качестве подмножества такую группу?

Заметим, что $M_2(\mathbb{R})$ содержит нулевую матрицу, которая не может лежать в группе по умножению, как не имеющая обратного элемента.

Также, например, матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ не может принадлежать группе, т.к. дает при возведении в квадрат нулевую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оказывается, все матрицы, имеющие нулевой определитель (вырожденные), не могут быть элементами группы по умножению.

ЗАДАЧА

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ — вырожденная матрица (т.е. $\det A = ad - bc = 0$). Доказать, что существует ненулевая матрица $B \in M_2(\mathbb{R})$ такая, что $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

На основе этой задачи мы очерчиваем круг матриц, которые образуют группу по умножению: это невырожденные матрицы.

ТЕОРЕМА О ГРУППЕ НЕВЫРОЖДЕННЫХ МАТРИЦ

ТЕОРЕМА

Множество невырожденных матриц 2×2 $L_2(\mathbb{R}) \subset M_2(\mathbb{R})$ образует группу относительно умножения (композиции соответствующих им линейных отображений).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Замкнутость относительно умножения.

Композиция двух биекций является биекцией, следовательно, соответствующая матрица будет также невырождена.

2) Существование нейтрального элемента.

Очевидно, что нейтральным элементом будет матрица тождественного преобразования Id в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$,

а именно, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица для случая 2×2 .

Для любой матрицы A выполнено $AE = EA = A$.

Для произвольного n единичная матрица имеет такой же диагональный вид с единицами на диагонали и нулями вне ее.

3) Существование обратного элемента.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ произвольная невырожденная матрица.

Построим в явном виде A^{-1} .

Можно убедиться, что $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$

Чтобы получить единичную матрицу, нужно разделить на $ad - bc = \det A \neq 0$. В итоге получаем:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Для произвольного n также существует формула для обратной матрицы, но мы на данном этапе общий случай не рассматриваем.

Теорема доказана.