

АРИФМЕТИКА МАТРИЦ. ЧАСТЬ 1

Пусть $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — базисные векторы прямоугольной системы координат на плоскости. Выражение $x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$ называется **линейной комбинацией** векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Совокупность всех **линейных комбинаций** называется линейной оболочкой векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Если векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ не коллинеарны, их линейная оболочка совпадает с $\mathbb{R}^2$.

МАТРИЦА КОМПОЗИЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейные отображения. Каждому из них соответствует матрица:

$$f \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad g \sim \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Это означает, что:

$$f(\bar{e}_1) = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2;$$

$$f(\bar{e}_2) = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2;$$

$$g(\bar{e}_1) = b_{11}\bar{e}_1 + b_{21}\bar{e}_2;$$

$$g(\bar{e}_2) = b_{12}\bar{e}_1 + b_{22}\bar{e}_2.$$

ВОПРОС

Как задать в виде матрицы результат композиции $g \circ f$?

$$\begin{aligned} (g \circ f)\bar{e}_1 &= g(f(\bar{e}_1)) = g(a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2) = \\ &= a_{11}g(\bar{e}_1) + a_{21}g(\bar{e}_2) = a_{11}(b_{11}\bar{e}_1 + b_{21}\bar{e}_2) + \\ &+ a_{21}(b_{12}\bar{e}_1 + b_{22}\bar{e}_2) = (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12})\bar{e}_1 + \\ &+ (a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22})\bar{e}_2. \end{aligned}$$

Аналогично получаем:

$$(g \circ f)\bar{e}_2 = (a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12})\bar{e}_1 + a_{12}b_{21} + (a_{22}b_{22})\bar{e}_2.$$

Таким образом, мы получили правило умножения матриц 2×2 :

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ РАЗНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Рассмотрим композицию $g \circ f$ линейных преобразований $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Эта композиция действует из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, и ее матрица 3×3 есть результат умножения матриц 2×3 и 3×3 :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим композицию в другом порядке $g \circ f$.
В этом случае мы получим матрицу 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} + b_{31}a_{13} & b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} + b_{32}a_{13} \\ b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} + b_{31}a_{23} & b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} + b_{32}a_{23} \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Обобщая правило умножения на случай матриц $m \times n$ и $k \times l$,
получим общую формулу для элемента c_{ij} матрицы
произведения, которая будет иметь размерность $m \times l$
(умножение возможно только при $n = k$):

$$\begin{matrix} & \text{j-й столбец} \\ \text{i-я строка} & \begin{pmatrix} b_{i1} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj} & \dots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

ДРУГИЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Любую матрицу mn можно умножить на число (при этом
каждый элемент матрицы умножается на это число), а также

сложить с другой матрицей той же размерности (при этом
получится матрица mn поэлементных сумм). То есть, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

то

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \dots & \lambda a_{1n} + \mu b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} + \mu b_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} + \mu b_{mn} \end{pmatrix}$$

На следующем занятии мы исследуем групповые свойства
матриц по умножению.