

1 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Итак, для линейного отображения $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ выполнено одно из трех:

либо $\text{Ker } f = \mathbb{R}^2$, $\text{Im } f = \{0\}$;

либо $\text{Ker } f = \{0\}$, $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$;

либо $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$ — некоторые прямые на плоскости.
(если векторы $f(\bar{e}_1)$ и $f(\bar{e}_2)$ коллинеарны).

ВОПРОС: Как это выглядит в координатах?

Как мы знаем, каждому f соответствует матрица 2×2 :

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{aligned} f(\bar{e}_1) &= a\bar{e}_1 + c\bar{e}_2 \\ f(\bar{e}_2) &= b\bar{e}_1 + d\bar{e}_2. \end{aligned}$$

Можно ли каким-то одним соотношением описать вырожденный и невырожденный случай для f ?

Это соотношение называется **определителем** матрицы (или линейного отображения):

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2) \text{ не коллинеарны (} f \text{ — биекция).}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Докажем, что в случае коллинеарности $f(\bar{e}_1)$ и $f(\bar{e}_2)$ определитель равен нулю.

Имеем $f(\bar{e}_2) = \lambda f(\bar{e}_1)$. Тогда:

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix} = \lambda ac - \lambda ac = 0$$

Установим, что обратное тоже верно.

$\det = 0 \Rightarrow$ ВЕКТОРЫ КОЛЛИНЕАРНЫ

Пусть $\det = ad - bc = 0$. Это означает, что $ad = bc$.

Случай 1.

$ad = bc \neq 0$. Тогда ни одно из чисел a, b, c, d не равно нулю.

Назовем $\lambda = \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Отсюда $b = \lambda a$, $d = \lambda c$.

Тогда $f \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix}$, откуда видно, что $f(\bar{e}_2) = \lambda f(\bar{e}_1)$.

Случай 2.

$ad = bc = 0$. Возникает несколько возможностей:

$a = 0, b = 0 \Rightarrow f \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2) \text{ коллинеарны } \bar{e}_2$.

$a = 0, c = 0 \Rightarrow f \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow f(\bar{e}_1) = 0$

коллинеарен любому вектору.

Случаи $b = 0, d = 0$ и $c = 0, d = 0$ аналогичны этим двум.

Таким образом, нами доказана

ТЕОРЕМА

f — биекция $\Leftrightarrow$ определитель матрицы f отличен от нуля.

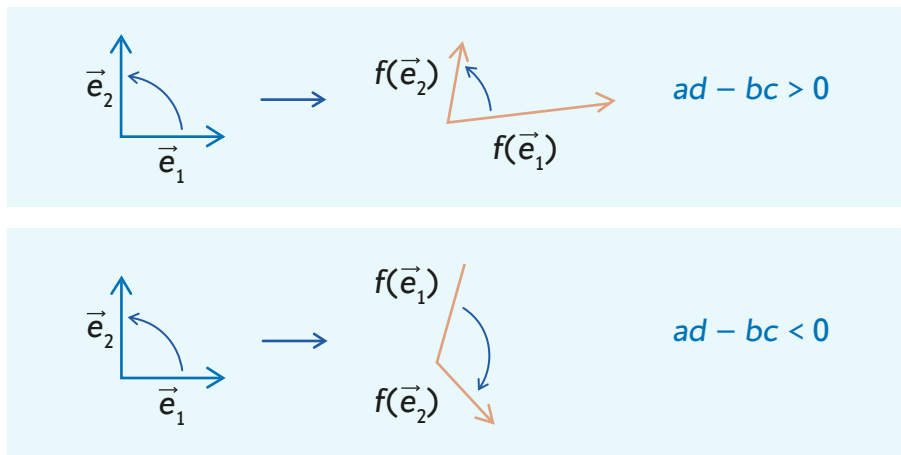
ВОПРОС

На что указывает знак определителя?

ЗНАК ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Если $ad = bc \neq 0$, то векторы $f(\vec{e}_1)$ и $f(\vec{e}_2)$ образуют базис. Можно ли по знаку определителя понять, как они расположены? Зафиксируем $f(\vec{e}_1)$. Мы можем непрерывно изменять вектор $f(\vec{e}_2)$, находясь по одну сторону от прямой, содержащей $f(\vec{e}_1)$, пока он не окажется на ней. В этот момент выражение $ad = bc$ обратится в ноль. До этого момента знак выражения $ad - bc$ будет постоянным. При переходе через прямую, содержащую $f(\vec{e}_1)$, знак сменится на противоположный.

Если поворот от вектора $f(\vec{e}_1)$ к вектору $f(\vec{e}_2)$ происходит в положительном направлении (против часовой стрелки), то $ad - bc > 0$. В этом случае отображение f сохраняет ориентацию плоскости. Иначе $ad - bc < 0$, и в этом случае отображение f меняет ориентацию плоскости.



Это важнейшее понимание, которое будет подтверждено в любой размерности.

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ В $\mathbb{R}^3$

Пусть $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — линейное отображение.

В $\mathbb{R}^3$ базис состоит из трех векторов: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Тогда $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)$ могут быть разложены по этому базису.

$$\vec{u} = f(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3$$

$$\vec{v} = f(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3$$

$$\vec{w} = f(\vec{e}_3) = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3$$

Тогда матрица f имеет вид таблицы 3 x 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Для линейного отображения трехмерного пространства есть 4 возможности:

- (i) $\text{Ker } f = \{0\}$, $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$;
- (ii) $\text{Ker } f$ — прямая, $\text{Im } f$ — плоскость;
- (iii) $\text{Ker } f$ — плоскость, $\text{Im } f$ — прямая;
- (iv) $\text{Ker } f = \mathbb{R}^3$, $\text{Im } f = \{0\}$.

ВОПРОС:

Есть ли в трехмерном пространстве понятие определителя (детерминанта)?

Можно ли выписать некоторую формулу через эти девять чисел a_{ij} , которая отлична от нуля тогда и только тогда, когда наблюдается случай (i)?

Оказывается, такая формула есть:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Индексы a_{ij} образуют все 6 возможных перестановок на 3-х символах, причем слагаемые с четными перестановками индексов входят со знаком «+», а слагаемые с нечетными перестановками индексов входят со знаком «-».

При произвольном n определителем будет сумма $n!$ слагаемых, образованных таким же образом на основе элементов a_{ij} матрицы $n \times n$, которая соответствует линейному отображению $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.