

СТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА

Пусть $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейное отображение.

Тогда выполнено одно из трех:

либо $\text{Ker } f = \mathbb{R}^2$, $\text{Im } f = \{0\}$;

либо $\text{Ker } f = \{0\}$, $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$;

либо $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$ — некоторые прямые на плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — базисные векторы в $\mathbb{R}^2$. Тогда для любого вектора $\bar{v} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$ выполнено:

$$f(\bar{v}) = f(x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2) = xf(\bar{e}_1) + yf(\bar{e}_2).$$

Рассмотрим все случаи расположения векторов $f(\bar{e}_1)$ и $f(\bar{e}_2)$.

Случай 0.

Пусть $f(\bar{e}_1) = f(\bar{e}_2) = 0$.

Тогда $\forall \bar{v} f(\bar{v}) = xf(\bar{e}_1) + yf(\bar{e}_2) = 0$

$\Rightarrow f$ — тождественно нулевое отображение:

$$\text{Ker } f = \mathbb{R}^2, \quad \text{Im } f = \{0\}.$$

Основной случай распадается на два:

Случай А. $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2)$ не принадлежат одной прямой (не коллинеарны).

Случай В. $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2)$ коллинеарны и не равны нулю одновременно (с точностью до перестановки $f(\bar{e}_2) = \lambda f(\bar{e}_1)$ для некоторого числа $\lambda \in \mathbb{R}$).

$\text{Ker } f$ в случае А

Пусть для некоторого $v \in \mathbb{R}^2$

$$f(\bar{v}) = xf(\bar{e}_1) + yf(\bar{e}_2) = 0.$$

Пусть $x \neq 0$ (если $y \neq 0$ рассуждение аналогично).

Тогда $f(\bar{e}_1) = -\frac{y}{x}f(\bar{e}_2)$, и $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2)$ коллинеарны.

Противоречие. Значит, $x = y = 0$.

$\text{Im } f$ в случае А

Векторы $f(\bar{e}_1)$ и $f(\bar{e}_2)$ не коллинеарны, а значит, образуют базис в $\mathbb{R}^2$, и любой вектор может быть разложен по этому базису:

$\forall \bar{w} \in \mathbb{R}^2 \exists x, y: \bar{w} = xf(\bar{e}_1) + yf(\bar{e}_2)$. Тогда вектор $\bar{v} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$ является прообразом вектора $\bar{w}$ при линейном отображении f .

Следовательно $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

При этом f — биекция (переводит различные векторы в различные).

В самом деле, пусть $\bar{v}_1 \neq \bar{v}_2$. Докажем, что тогда $f(\bar{v}_1) \neq f(\bar{v}_2)$.

Рассмотрим вектор $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$. С учетом линейности имеем:

$$0 \neq f(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) = f(\bar{v}_1) - f(\bar{v}_2) \Rightarrow f(\bar{v}_1) \neq f(\bar{v}_2).$$

Случай В

$$f(\bar{e}_2) = \lambda f(\bar{e}_1).$$

Рассмотрим $\bar{v} \in \text{Ker } f \Rightarrow f(\bar{v}) = 0$.

Пусть $\bar{v} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$. Тогда (если $f(\bar{e}_1) \neq 0$)

$$f(\bar{v}) = xf(\bar{e}_1) + yf(\bar{e}_2) = xf(\bar{e}_1) + y\lambda f(\bar{e}_1) = f(\bar{e}_1)(x + y\lambda) = 0 \Rightarrow x + y\lambda = 0$$
 — а это есть уравнение прямой.

Значит, $\text{Ker } f$ — прямая.

При этом все векторы плоскости переходят в коллинеарные $f(\bar{e}_1)$, а значит, $Im f$ есть прямая, проходящая через начало координат и содержащая $f(\bar{e}_1)$.

Теорема полностью доказана.

ПРИМЕРЫ

Пусть $f(\bar{e}_2) = 3f(\bar{e}_1)$. Тогда прямая, являющаяся $Ker f$, имеет уравнение $x + 3y = 0$.

А образ зависит от того, как расположен вектор $f(\bar{e}_1)$.

Что если $f(\bar{e}_1)$ лежит на этой же прямой? Тогда выполнено $f(\bar{e}_1) = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2$. В этом случае $Im f = Ker f$.

На следующем уроке мы познакомимся с понятием «определитель», а также заглянем в трехмерное пространство.