

ЯДРО И ОБРАЗ ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА И ОБРАЗА

Пусть на плоскости задана система координат с центром в точке O и базисными векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$.

Пусть $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейное отображение.

Ядро f — это множество всех векторов плоскости, которые f переводит в ноль:

$$\text{Ker } f = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2, f(\bar{v}) = 0\}.$$

Образ f — это множество всех векторов, в которые f переводит все векторы плоскости:

$$\text{Im } f = \{\bar{w} \in \mathbb{R}^2, \exists \bar{v} : f(\bar{v}) = \bar{w}\}.$$

ПРИМЕР 0

Тождественно нулевое отображение

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \quad f(v) = 0.$$

Тогда:

$$\text{Ker } f = \mathbb{R}^2, \quad \text{Im } f = \{0\}.$$

ПРИМЕР 1

Поворотная гомотетия

$f_z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (или $f_z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость)

$$\forall z \in \mathbb{R}^2, z \neq 0 \quad f_z(w) = z \cdot w.$$

Проверим, что f_z линейно:

$$1) f_z(w_1 + w_2) = z(w_1 + w_2) = zw_1 + zw_2 = f_z(w_1) + f_z(w_2);$$

$$2) f_z(\lambda w) = z(\lambda w) = \lambda(zw) = \lambda f_z(w).$$

Докажем, что $\text{Ker } f = \{0\}$, $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.

$$f_z(v) = 0 \Leftrightarrow zv = 0 \Leftrightarrow v = 0, \text{ т.к. } z \neq 0.$$

ЯДРО И ОБРАЗ ПОВОРОТНОЙ ГОМОТЕТИИ

Любое комплексное число, а также вектор, могут быть записаны в координатах в базисе $\bar{e}_1 = 1$ и $\bar{e}_2 = i$:

$$z = a + bi, \quad v = x + yi.$$

Найдем образы базисных векторов при отображении f_z :

$$f_z(1) = (a + bi)1 = a + bi,$$

$$f_z(i) = (a + bi)i = -b + ai.$$

Получаем:

$$f_z \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Для произвольного вектора $v = x + yi$

$$f_z(v) = (a + bi)(x + bi) = (ax - by) + i(bx + ay)$$

То есть $f_z: (x, y) \rightarrow (ax - by, bx + ay)$.

Изучим ядро и образ преобразования f на конкретном примере.

Пусть $z = -1 + i$.

Тогда:

$$f(x + yi) = (-1 + i)(x + yi) = (-x - y) + (x - y)i.$$

То есть $f: (x, y) \rightarrow (-x - y, x - y)$.

Куда перейдут базисные векторы?

$$e_1 (1, 0) \rightarrow (-1, 1)$$

$$e_2 (0, 1) \rightarrow (-1, -1).$$

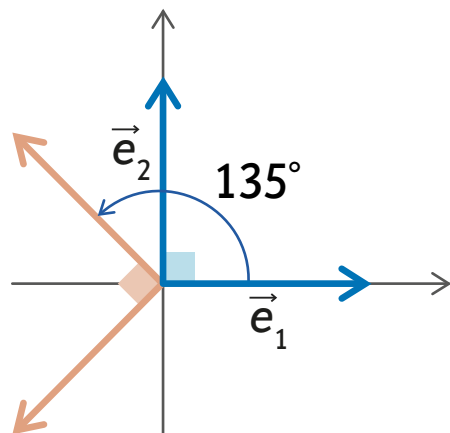
При таком отображении базисные векторы поворачиваются на угол 135° (угол между ними остается прямым) и удлиняются в $\sqrt{2}$ раз. То же самое происходит и с любым другим вектором плоскости.

При таком отображении (поворотной гомотетии с центром в начале координат) единственный вектор, переходящий в ноль, это нулевой вектор.

При этом для каждого вектора можно указать тот вектор, который перешел в него в результате f (нужно сжать вектор в $\sqrt{2}$ раз и повернуть на 135° в противоположную сторону).

Таким образом, f — биекция:

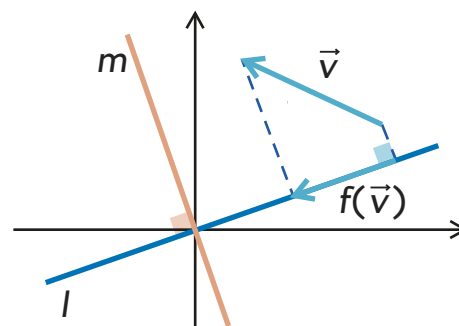
$$\text{Ker } f = \{\vec{0}\}, \text{Im}(f) = \mathbb{R}^2.$$



Умножение на любое комплексное число $z = a + bi$ также будет биекцией.

ПРОЕКЦИРОВАНИЕ

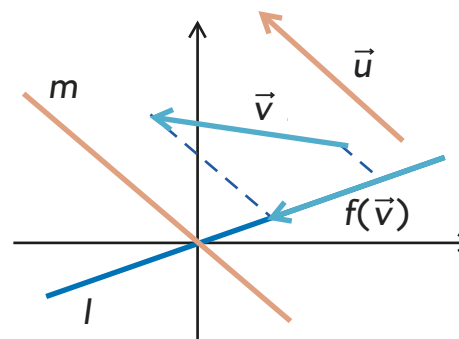
Возьмем произвольную прямую l , проходящую через начало координат. Любому вектору поставим в соответствие его ортогональную (под прямым углом) проекцию на l .



При таком отображении (ортогональном проецировании) все векторы плоскости переходят в векторы, принадлежащие данной прямой. Ядром f будет прямая, проходящая через начало координат, перпендикулярно l :

$$\text{Im } f = l, \text{Ker } f = m, \text{ где } m \perp l.$$

Пусть теперь прямая l также проходит через начало координат, и задано произвольное направление (вектор $\vec{u}$), и проецирование происходит на прямую l вдоль этого направления.



3

В этом случае образ f также совпадает с прямой l , а ядром является прямая, проходящая через начало координат, параллельно направлению проецирования:

$Im f = l$, $Ker f = m$, где $m \parallel \bar{u}$.

ЯДРО И ОБРАЗ ДВИЖЕНИЯ

Пусть теперь f — движение плоскости.

Так как f сохраняет расстояния между точками, только нулевой вектор может переходить в нулевой, следовательно, $Ker f = \{\bar{0}\}$.

На уроке 65 мы разобрали, как действуют на векторы все виды движений плоскости: параллельный перенос, поворот, отражение и скользящая симметрия. Принципиально это действие сводится к повороту или отражению.

И для того, и для другого можно указать вектор — прообраз для любого вектора плоскости, а значит, $Im(f) = \mathbb{R}^2$.