

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРЯМОЙ

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — отображение, для которого выполнены свойства линейности:

1. $f(v + w) = f(v) + f(w)$
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

ВОПРОС: Какие существуют на прямой отображения с такими свойствами?

ЛЕММА

Для линейного отображения f выполнено:
 $f(0) = 0$.

Действительно,
 $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Это замечание верно и для плоскости.

ТЕОРЕМА

Любое линейное отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является гомотетией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим единичный вектор на прямой.
Возможны два случая:

1 случай.

$$f(1) = 0.$$

Тогда $\forall a \in \mathbb{R} \quad f(a) = f(a \cdot 1) = af(1) = a \cdot 0 = 0$.

Следовательно, f всю прямую переводит в 0.

2 случай.

$$f(1) = \lambda \neq 0.$$

Тогда $\forall a \in \mathbb{R} \quad f(a) = f(a \cdot 1) = af(1) = \lambda a \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ — подобие.

Следовательно, $f = H_0^\lambda$ — гомотетия с центром в точке 0 и коэффициентом λ .

При $\lambda = 1 \quad f = Id$, а при $\lambda = -1 \quad f = S_0$ — отражение относительно точки 0.

Теорема доказана.

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим теперь отображение плоскости $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого выполнены свойства линейности:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

1. $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
2. $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

Аналогично прямой на плоскости выполнено $f(0) = 0$.

На предыдущем уроке было доказано, что движения и подобия плоскости являются линейными отображениями.

В дальнейшем мы познакомимся с другими видами преобразований плоскости, которые также являются линейными.

ВОПРОС: Как можно задать линейное отображение плоскости?

Введем на плоскости прямоугольную систему координат с началом в точке O . Отложим вдоль осей координат два единичных вектора: $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Это **базисные** векторы.

Рассмотрим любую точку на плоскости с радиус-вектором $\vec{v} = (x, y)$. Тогда можно выразить этот вектор как **линейную комбинацию** базисных векторов:

$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Теперь мы хотим выразить подобным образом вектор $f(\vec{v})$.

Имеем, с учетом свойств линейности:

$$f(\vec{v}) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2)$$

Таким образом, зная, куда переходят при отображении f базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, мы можем выразить через их образы образ любого вектора плоскости. Сами же $f(\vec{e}_1)$ и $f(\vec{e}_2)$ мы можем выразить через базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

МАТРИЧНАЯ ЗАПИСЬ ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Любому линейному отображению f можно поставить в соответствие таблицу 2×2 , в которой по столбцам стоят координаты векторов $f(\vec{e}_1)$ и $f(\vec{e}_2)$:

$$\begin{pmatrix} \text{1-я координата} & \text{1-я координата} \\ \text{вектора } f(\vec{e}_1) & \text{вектора } f(\vec{e}_2) \\ \text{2-я координата} & \text{2-я координата} \\ \text{вектора } f(\vec{e}_1) & \text{вектора } f(\vec{e}_2) \end{pmatrix}$$

Такие таблицы, состоящие из m строк и n столбцов чисел, называются **матрицами** размерности $m \times n$.

ПРИМЕР 1

Пусть линейное отображение f есть гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом μ .

Замечание: для гомотетии с другим центром не будут выполнены свойства линейности!

Имеем:

$$f(\vec{e}_1) = \lambda \vec{e}_1 = \lambda \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2,$$

$$f(\vec{e}_2) = \lambda \vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + \lambda \cdot \vec{e}_2.$$

Имеем для f следующую матричную запись:

$$f = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad \text{При } \lambda = 0 \quad f \equiv 0.$$

ПРИМЕР 2

Пусть линейное отображение f растягивает векторы плоскости в 4 раза вдоль оси абсцисс без изменения вдоль оси ординат.

Тогда:

$$f(\vec{e}_1) = 4 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2,$$

$$f(\vec{e}_2) = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2.$$

Имеем для f следующую матричную запись:

$$f = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отметим, что f не является ни одним из известных нам отображений. Вообще любая матрица, т.е. набор из произвольных четырех чисел, задает какое-нибудь линейное отображение.

ПРИМЕР 3

Возьмем произвольную матрицу 2×2 и изобразим на координатной плоскости образы базисных векторов при соответствующем линейном отображении:

$$f = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Имеем:

$$f(\vec{e}_1) = -1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2,$$

$$f(\vec{e}_2) = 3 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2.$$

Можем изобразить эти векторы на координатной плоскости:

