

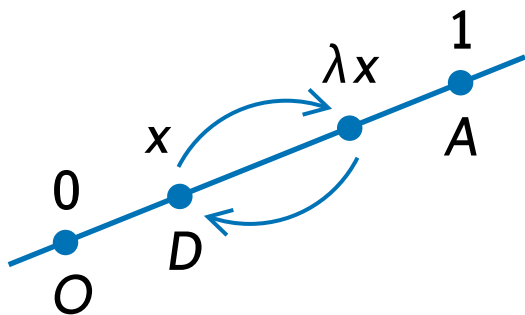
КЛАССИФИКАЦИЯ ПОДОБИЙ НА ПРЯМОЙ. ЧАСТЬ 3

КОМПОЗИЦИЯ $H_A^\mu \circ T_O^\lambda$, СЛУЧАЙ $\lambda\mu \neq 1$

Логика рассуждений будет такой же: если мы найдем неподвижную точку этого преобразования, то мы получим подобие с неподвижной точкой, что по основополагающей лемме из 62-го урока есть гомотетия, коэффициент которой в данном случае будет равен $\lambda\mu$.

Итак, ищем точку D такую, что $H_A^\mu \circ H_O^\lambda = H_D^{\lambda\mu}$.

Пусть $\lambda, \mu > 1$. Введем систему координат с началом в точке O и единичным отрезком OA . Будем искать координату x точки D как долю отрезка OA .



$x \rightarrow \lambda x$, а затем $(1 - \lambda x)$ — расстояние до точки A превращается в $\mu(1 - \lambda x)$. Получаем уравнение: $1 - \mu(1 - \lambda x) = x$.

Отсюда $x = \frac{\mu - 1}{\lambda\mu - 1}$, и координата точки D равна

$$D = O + \frac{\mu - 1}{\lambda\mu - 1} \overline{OA}.$$

УПРАЖНЕНИЕ

Рассмотреть все остальные случаи и убедиться, что получится то же самое.

Оказывается, эта формула также описывает случаи, когда $\lambda = 0$ или $\mu = 0$ или одновременно $\lambda, \mu = 0$.

СЛУЧАЙ $\lambda\mu = 1$

Здесь растяжение и сжатие компенсируют друг друга, и композиция гомотетий даст параллельный перенос.

Вопрос только в том, на какой вектор.

$$H_A^{1/\lambda} \circ H_O^\lambda = T_?$$

Пусть $\lambda > 1$. Проследим, куда переходит точка O .

$$H_O^\lambda(O) = O, H_A^{1/\lambda}(O) = D, \text{ где } \overline{DA} = \frac{1}{\lambda} \overline{OA}.$$

$$\text{Тогда } \overline{OD} = \overline{OA} - \frac{1}{\lambda} \overline{OA} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \overline{OA}.$$

Какая точка перейдет в точку A ? Такая точка F , что $\overline{OF} = \frac{1}{\lambda} \overline{OA}$. Это параллельный перенос на тот же самый вектор

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda} \overline{OA} = (1 - \mu) \overline{OA}.$$

В частности, при $\lambda = 2$ получаем $\mu = \frac{1}{2}$ и параллельный перенос на вектор $\frac{1}{2} \overline{OA}$.

2 ПОЛНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПОДОБИЙ НА ПРЯМОЙ

	$T_{\vec{w}}$	$H_O^\lambda, \lambda \neq 1$
$T_{\vec{v}}$	$T_{\vec{v} + \vec{w}}$	$H_O^\lambda \circ \frac{1}{\mu-1} \vec{v}$
$H_A^\mu, \mu \neq 1$	$H_A^\mu \circ \frac{\mu}{\mu-1} \vec{w}$	$\lambda\mu \neq 1 \quad H_{O + \frac{\mu-1}{\lambda\mu-1} \vec{OA}}^{\lambda\mu}$ $\lambda\mu = 1 \quad T_{(1-\mu)\vec{OA}}$

СЛЕДСТВИЕ

Любое нетривиально меняющее расстояние подобие на прямой является гомотетией. В частности, имеет неподвижную точку (центр гомотетии).

ПОДОБИЯ НА ПЛОСКОСТИ

УТВЕРЖДЕНИЕ 1

Любое подобие является композицией движения и гомотетии.

$$P = H_O^\kappa \circ g.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Аналогично случаю с прямой: домножаем слева на $H_O^{1/\kappa}$ и убеждаемся, что расстояния не изменились, следовательно, $H_O^{1/\kappa} \circ P$ — движение. Далее, перебираем все известные нам движения плоскости: $g = T, S, R, L$ и в каждом случае домножаем на H_O^κ и смотрим, что получается.

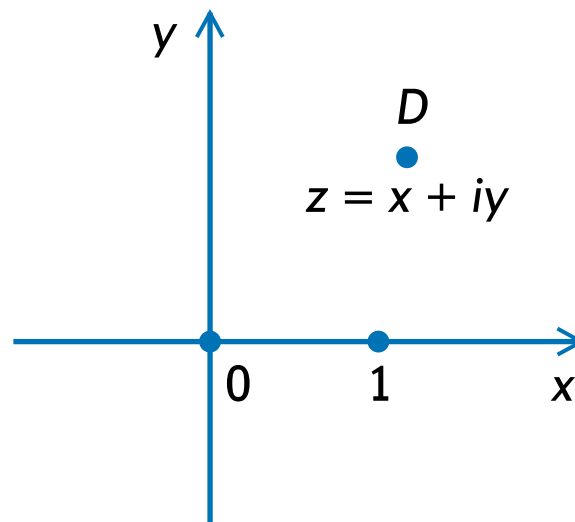
УТВЕРЖДЕНИЕ 2

Любое подобие плоскости, сохраняющее ориентацию и имеющее неподвижную точку, является поворотной гомотетией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Если подобие не имеет неподвижной точки, точку A в точку $P(A)$, то можно домножить его на перенос на вектор $\overrightarrow{P(A)A}$ и эту неподвижную точку получить.

Далее, помещаем неподвижную точку в начало координат и посмотрим, куда перейдет точка 1 в результате нашего преобразования. Пусть она перешла в точку D , которой на комплексной плоскости соответствует число $z \in \mathbb{C}$.



Рассмотрим композицию $\varphi_{1/z} \circ P$. Это преобразование сохраняет ориентацию и имеет две неподвижные точки (0 и 1). Таких нетривиальных движений плоскости не существует по теореме о трех гвоздях. Значит, $\varphi_{1/z} \circ P = Id$, откуда, домножая на φ_z , получаем $P = \varphi_z$. Это поворотная гомотетия (домножение на комплексное число). Что и требовалось доказать.

На этом мы завершаем краткий экскурс в тему подобий на плоскости и всю тему подобий, а далее объектом нашего пристального изучения будут векторы.