

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОДОБИЙ НА ПРЯМОЙ. ЧАСТЬ 2

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ $H_A^\mu \circ T_{\vec{w}}$

На прошлом уроке мы получили, что при $\mu = 2$ эта композиция есть гомотетия с тем же коэффициентом, но центр которой сдвинут относительно точки A в противоположном вектору $\vec{w}$ направлении на его удвоенную длину:

$$H_A^2 \circ T_{\vec{w}} = H_{A - 2\vec{w}}^2.$$

В общем случае мы снова будем искать неподвижную точку этой композиции, и по нашей лемме получим, что это центр гомотетии, которая получится в результате.

Кажется, что здесь нужно рассмотреть много разных случаев: во-первых, результат гомотетии разный при $\mu < 0$, $0 < \mu < 1$ и $\mu > 1$, а во-вторых, разные результаты для точек на прямой, расположенных по одну или другую сторону от точки A .

Оказывается, если один из случаев рассмотреть в координатах и получить формулу, то эта формула будет универсальной для всех случаев. В этом состоит «магия Декарта» («магия координат»).

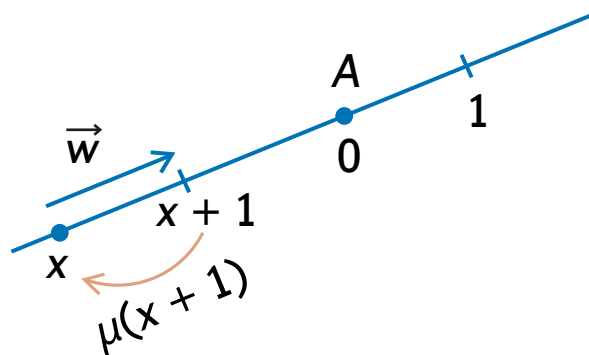
Будем рассматривать случай $\mu > 1$. Как и в частном случае $\mu = 2$, неподвижную точку имеет смысл искать в направлении от точки A , противоположном вектору $\vec{w}$.

ВВОДИМ СИСТЕМУ КООРДИНАТ

Введем систему координат с началом в точке A и единичным отрезком длиной $\vec{w}$ и в направлении вектора $\vec{w}$.

Пусть в этой системе координат неподвижная точка имеет координату x . В результате $T_{\vec{w}}$ она перейдет в точку $x + 1$, а затем ее координата увеличится в μ раз. Так как эта точка — неподвижная, получаем уравнение:

$$\mu(x + 1) = x, \text{ откуда } x = -\frac{\mu}{\mu - 1}.$$



Уравнение и полученный результат никак не зависят от нашего выбора $\mu > 1$, она применима для всех случаев.

В итоге получаем:

$H_A^\mu \circ T_{\vec{w}} = H_{A - \frac{\mu}{\mu - 1}\vec{w}}^\mu$ — гомотетия с тем же коэффициентом, но новым центром.

В случае $\mu = 1$ $H_A^1 = Id \Rightarrow H_A^1 \circ T_{\vec{w}} = T_{\vec{w}}$ — просто перенос.

Заметим, что в случае $\mu = -1$ наша гомотетия есть отражение, а композиция переноса и отражения есть отражение относительно новой точки. Проверим, что наша формула дает этот же результат:

$$S_A \circ T_{\bar{w}} = H_A^{-1} \circ T_{\bar{w}} = H^{-1}_{A - \frac{(-1)}{-1-1}\bar{w}} = S_{A - \frac{\bar{w}}{2}},$$

что и требовалось установить.

КОМПОЗИЦИЯ $T_{\bar{v}} \circ H_O^\lambda$

Отложим на прямой вектор $\bar{v}$ с началом в точке O . Будем искать неподвижную точку D нашей композиции.

Будем рассматривать случай, когда $0 < \lambda < 1$, т.е. сначала происходит сжатие к точке O , а затем параллельный перенос на вектор $\bar{v}$. Имеет смысл искать эту точку в направлении вектора $\bar{v}$ от O .

Введем систему координат с началом в точке O и единичным отрезком, совпадающим по длине и направлению с вектором v .

Пусть y — координата точки D . Получаем уравнение:

$$\lambda y + 1 = y, \text{ откуда } y = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Таким образом, композиция $T_{\bar{v}} \circ H_O^\lambda = H_{O + \frac{1}{1-\lambda}\bar{v}}^\lambda$ — гомотетия с коэффициентом λ и центром в точке, сдвинутой относительно O на вектор $\frac{1}{1-\lambda}\bar{v}$.

Полученный нами ответ универсален для любого значения λ . Если при $0 < \lambda < 1$ у нас получилась координата неподвижной точки больше 1, то в других случаях эта же формула даст нам расположение неподвижной точки именно там, где она должна быть.

Итак, мы нашли обе композиции переноса и гомотетии. Замечаем аналогию с композициями переносов и отражений:

там мы точно так же получили в одном случае сдвиг в направлении вектора переноса, а в другом случае — сдвиг в обратном направлении.

Обратим внимание на неподвижные точки, которые получаются, когда мы сначала сдвинули, а затем сжали, и наоборот, когда мы сначала сжали, а затем сдвинули.

При $\lambda = \mu$ и $\bar{v} = \bar{w}$ они находятся в точности на расстоянии вектора v друг от друга:

$$\frac{1}{1-\lambda} - 1 = -\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

О КОМПОЗИЦИИ $H_A^\mu \circ H_O^\lambda$

Казалось бы здесь возникает большое количество разных случаев, однако «магия Декарта» позволяет рассмотреть только 2 принципиально разные ситуации.

Понятно, что мы будем ожидать здесь гомотетию с коэффициентом $\lambda\mu$. Однако в случае $\lambda\mu = 1$ мы не получим гомотетию! Ведь гомотетия с коэффициентом 1 есть Id , но гомотетии с разными центрами не могут быть обратны друг другу (для каждой из них обратными будут $H_A^{1/\mu}$ и $H_O^{1/\lambda}$ соответственно). Поэтому в случае $\lambda\mu = 1$ результат композиции будет другим.

Но при $\lambda\mu = 1$ расстояния не меняются, значит, это движение, причем сохраняющее ориентацию прямой. Тогда это перенос.

На следующем уроке мы подробно рассмотрим оба случая $\lambda\mu = 1$ и $\lambda\mu \neq 1$ и завершим тем самым полную классификацию подобий на прямой.