

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОДОБИЙ НА ПРЯМОЙ. ЧАСТЬ 1

СТРУКТУРА ПОДОБИЯ НА ПРЯМОЙ

На прошлом уроке мы установили, что для любого подобия $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с коэффициентом $k > 0$ композиция $H_O^{1/k} \circ P$ является движением прямой.

Значит, это перенос либо отражение:

$$H_O^{1/k} \circ P = T_a \text{ либо}$$

$$H_O^{1/k} \circ P = S_A.$$

Рассмотрим композицию H_O^k с этими отображениями и по свойству ассоциативности переставим скобки:

$$(H_O^k \circ H_O^{1/k}) \circ P = H_O^k \circ T_a \text{ либо}$$

$$(H_O^k \circ H_O^{1/k}) \circ P = H_O^k \circ S_A.$$

Слева в скобках мы получили Id (тождественное преобразование). А значит, для подобия P получаем две возможности:

$$P = H_O^k \circ T_a \text{ либо } P = H_O^k \circ S_A.$$

Таким образом, любое подобие на прямой является композицией переноса и гомотетии или отражения и гомотетии (при этом центр гомотетии и точка, относительно которой происходит отражение, вообще говоря, не совпадают).

ТЕОРЕМА КЛАССИФИКАЦИИ ПОДОБИЙ НА ПРЯМОЙ

Итак, у нас есть две возможности для подобия на прямой:

$$P = H_O^k \circ T_a \text{ либо } P = H_O^k \circ S_A.$$

Учитывая, что $S_A = H_A^{-1}$, второй случай включается в общий анализ композиции двух гомотетий: $H_O^k \circ H_O^y$.

Если мы установим, что переносы и гомотетии образуют группу, то любая их композиция будет также переносом или гомотетией, и тогда любое подобие тоже будет являться переносом или гомотетией.

ТЕОРЕМА

- (I) Любое подобие на прямой есть либо перенос, либо гомотетия.
- (II) Множество, состоящее из всевозможных переносов и гомотетий образует группу.

Доказательство будет долгим, т.к. нужно будет рассмотреть много разных случаев.

ПОДГРУППЫ ГРУППЫ ПОДОБИЙ НА ПРЯМОЙ

Рассмотрим некоторые очевидные подгруппы группы переносов и гомотетий:

1. $\{T_a\}$ — подгруппа переносов: $T_a \circ T_b = T_b \circ T_a = T_{a+b}$.

Это абелева группа, которая изоморфна группе вещественных чисел по сложению:

$$\{T_a\} \cong \langle \mathbb{R}, + \rangle.$$

Перенос при $a > 0$ (сдвиг вправо) эквивалентен сложению с положительным числом, а при $a < 0$ (сдвиг влево) эквивалентен сложению с отрицательным числом.

2. Для любой точки O $\{H_O^\lambda\}_{\lambda \neq 0}$ — подгруппа гомотетий с центром в этой точке. Эта подгруппа изоморфна группе вещественных чисел без нуля по умножению:

$$\{H_O^\lambda\} \cong \langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle.$$

Теперь нам предстоит выяснить, каковы будут результаты композиций $T \circ H$, $H \circ T$ и $H \circ H$.

ПРИМЕР $H_A^2 \circ T_{\vec{w}}$

Начинаем заполнять таблицу композиций.

Чему равно $H_A^2 \circ T_{\vec{w}}$?

Сначала рассмотрим конкретный пример при $\lambda = 2$.

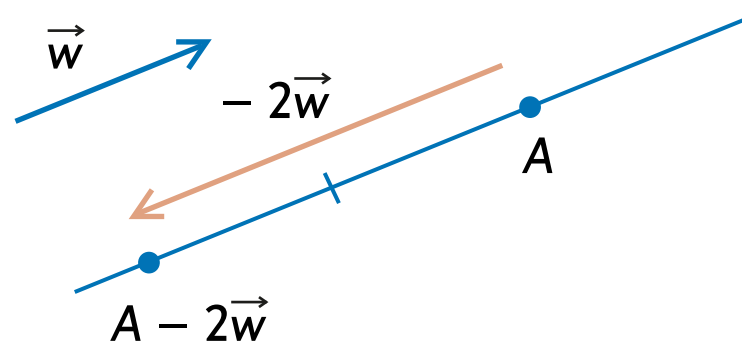
Пусть есть вектор $\vec{w}$ на плоскости. Будем рассматривать композицию $H_A^2 \circ T_{\vec{w}}$.

Проведем через точку A прямую, параллельную вектору $\vec{w}$, на которой и будем рассматривать подобие. Заметим, что этот случай для прямой и для плоскости выглядит одинаково.

Идея состоит в том, чтобы нащупать какую-нибудь неподвижную точку этого преобразования. Позже мы докажем, что подобие с неподвижной точкой — это гомотетия с центром в этой точке.

Точка A точно не будет неподвижной (она «уедет» на $2\vec{w}$ вправо). Имеет смысл искать неподвижную точку слева от A . Оказывается, это точка, расположенная левее A на удвоенную длину вектора $\vec{w}$:

$$A - 2\vec{w} \xrightarrow{T_{\vec{w}}} A - \vec{w} \xrightarrow{H_A^2} A - 2\vec{w}$$



Здесь мы пользуемся принципом, что сумма точки и вектора — это всегда точка.

Утверждается, что $H_A^2 \circ T_{\vec{w}} = H_{A-2\vec{w}}^2$, т.е. гомотетия с этим новым центром.

Заметим, что коэффициент может быть только 2 или -2, т.к. расстояние выросло в 2 раза. Но любой вектор при этом преобразовании не меняет своего направления, поэтому переворачивания нет, а значит, коэффициента -2 быть не может. Значит, если мы докажем, что это гомотетия, то она точно имеет коэффициент 2.

ЛЕММА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ПОДОБИЯ

ЛЕММА

Если P — подобие на прямой с коэффициентом x имеет неподвижную точку D , то $P = H_D^{\pm x}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть F — любая точка на прямой. Если точка $P(F)$ лежит по ту же сторону от D , что и F , то возьмем композицию $H_D^{1/x} \circ P$. Если же точка $P(F)$ лежит по другую сторону от D , то возьмем композицию $H_D^{-1/x} \circ P$. И в том, и в другом случае это будет движение, в результате которого точки D и F останутся на месте. По теореме «о двух гвоздях» это Id .

Тогда если $H_D^{1/x} \circ P = Id$, домножая слева на H_D^x и переставляя скобки, получим

$$(H_D^x \circ H_D^{1/x}) \circ P = H_D^x \circ Id \Rightarrow P = H_D^x,$$

а если $H_D^{-1/x} \circ P = Id$, домножая слева на H_D^{-x} и переставляя скобки, получим

$$(H_D^{-x} \circ H_D^{-1/x}) \circ P = H_D^{-x} \circ Id \Rightarrow P = H_D^{-x}.$$

Лемма доказана.

Следовательно, в нашем примере $H_A^2 \circ T_{\bar{w}} = H_{A-2\bar{w}}^2$.

На следующем уроке мы обобщим этот результат на общий случай композиции переноса и гомотетии.