

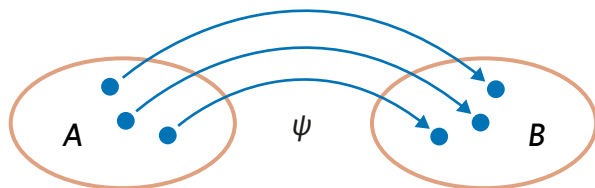
1 ОТОБРАЖЕНИЯ

ПРИМЕРЫ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть A и B — любые множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

$\psi: A \rightarrow B$ — **отображение**, если любому элементу $a \in A$ ставится в соответствие некоторый элемент $\psi(a) \in B$.



Рассмотрим несколько примеров.

П1. «Возраст» $B: \{\text{люди}\} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Данное отображение каждому человеку ставит в соответствие его полное число лет.

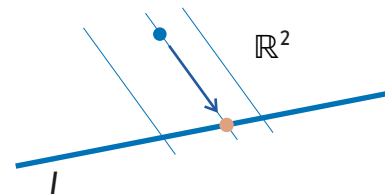
П2. «Пол» $P: \{\text{люди}\} \rightarrow \{М, Ж\}$.

Данное отображение каждому человеку сопоставляет одно из двух значений — $М$ или $Ж$.

П3. «Номер машины»: $\{\text{машины}\} \rightarrow \{***NNN\}$ — отображение, которое каждой машине ставит в соответствие комбинацию трех букв и трех цифр.

«Паспорт»: $\{\text{люди}\} \rightarrow \{\text{набор букв и цифр}\}$ — отображение, сопоставляющее человеку его паспортные данные.

П4. Проекция. Пусть дана прямая l и некоторое направление. Каждой точке плоскости ставится в соответствие ее проекция на прямую l , которая получается сдвигом вдоль данного направления.



Чтобы исследовать отображения, нужно их как-то классифицировать. Некоторую базовую классификацию мы сейчас изучим.

ВИДЫ ОТОБРАЖЕНИЙ

Инъекцией (вложением) называется отображение $\psi: A \rightarrow B$, при котором разные элементы множества A переходят в разные элементы множества B .

То есть $a_1 \neq a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \neq \psi(a_2)$.

Например, отображения «номер машины» и «паспорт» являются инъекциями.

Сюръекцией (наложением) называется отображение: $\psi: A \rightarrow B$, при котором для каждого элемента множества B существует его прообраз в множестве A . То есть образ всего множества A совпадает с множеством B : $\psi(A) = B$.

Образом отображения ψ называется множество всех элементов, в которые переходят элементы из множества A : $Im\psi = \{\psi(a) \in B \mid a \in A\} = \psi(A) \subset B$.

Если $\psi: A \rightarrow B$, то $\bar{\psi}: A \rightarrow Im\psi$ — сюръекция.

Прообразом подмножества $D \subset B$ при отображении $\psi: A \rightarrow B$ называется множество всех элементов из A , переходящих в элементы из D :

$$\text{Im}^{-1}(D) = \{a \in A \mid \psi(a) \in D\}.$$

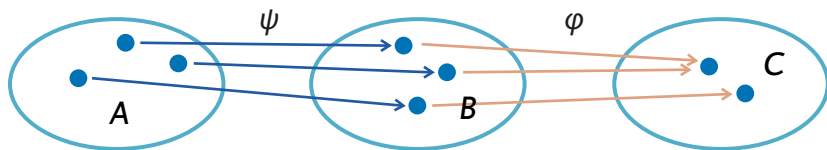
Образом подмножества $F \subset A$ называется подмножество множества B , куда элементы из F под действием **сужения** отображения ψ на F :

$$\psi|_F: F \rightarrow B.$$

Например, если взять учеников 6-го класса, то образ этого множества при отображении «возраст» будет состоять из 2-3 значений.

КОМПОЗИЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ, БИЕКЦИЯ, ОБРАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Пусть $\psi: A \rightarrow B$ и $\varphi: B \rightarrow C$ — отображения. Тогда их **композицией** называется отображение $\varphi \circ \psi: A \rightarrow C$.



Пусть есть еще одно отображение $\chi: C \rightarrow D$. Тогда выполняется закон ассоциативности композиции отображений:

$$\chi \circ (\varphi \circ \psi) = (\chi \circ \varphi) \circ \psi.$$

Отображение $\psi: A \rightarrow B$ называется **взаимно однозначным (биекцией)**, если оно одновременно является инъекцией и сюръекцией.

Для биекции $\psi: A \rightarrow B$ существует **обратное** отображение $\psi^{-1}: B \rightarrow A$. Это такое отображение, что выполнено:

$$\psi^{-1} \cdot \psi = \text{id}_A, \quad \psi \cdot \psi^{-1} = \text{id}_B.$$

В качестве упражнения можно убедиться, что если для отображения ψ существует другое отображение, что выполнены эти свойства, то ψ является биекцией.

Биекция $\eta: A \rightarrow A$ называется **преобразованием A** .

ЕЩЕ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

П6. Остатки по модулю 7: каждому целому числу сопоставляется один из остатков $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$. Это отображение будет сюръекцией и не будет инъекцией.

П7. Отображение «Отец»: $\{\text{люди}\} \rightarrow \{\text{люди}\}$.

Это отображение не является ни сюръекцией, ни инъекцией, так как не все люди — отцы, а у одного отца может быть несколько детей.

Композиция **Отец** $\circ$ **Пол** сводит множество всех людей в одну точку — **М**.

П8. Отображение «Максимальный угол»: $\{\text{множество всех треугольников}\} \rightarrow [60^\circ; 180^\circ]$.

П9. То же отображение, но из множества всех треугольников с точностью до равенства.

П10. То же отображение, но из множества всех треугольников с точностью до подобия.

Тогда прообраз для 60° отображения П10 — это ровно один объект — равносторонний треугольник.