

САМАЯ ГЛАВНАЯ ФОРМУЛА МАТЕМАТИКИ

ЭТО ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА:

$$e^{i\pi} = -1.$$

КОМПЛЕКСНАЯ ЭКСПОНЕНТА

Можно рассмотреть на комплексной плоскости ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Конечные суммы этого ряда есть последовательность векторов, которые образуют бесконечную спираль, сходящуюся к конкретному числу. Это число называется комплексной экспонентой, e^z .

Рассмотрим на комплексной плоскости последовательность $(1 + \frac{z}{n})^n$.

Можно визуальнo наблюдать, что векторы вида $1 + z$, $(1 + \frac{z}{2})^2$, $(1 + \frac{z}{3})^3$ также сходятся к некоторому числу.

Прежде чем работать с комплексной экспонентой, установим, что для $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ выполнено свойство экспоненциальной функции.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{y}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n (1 + \frac{y}{n})^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n \cdot n})^n.$$

Осталось доказать, что это тот же предел,

что и $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x+y}{n})^n$.

Они отличаются на поправку $\frac{(x+y)^2}{n^2}$.

Докажем, что эта поправка не оказывает влияния на значение предела.

СВОЙСТВО ЭКСПОНЕНТЫ ДЛЯ ПРЕДЕЛА

Для доказательства этого нужно установить, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{c}{n} + \frac{y_n}{n^2})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{c}{n})^n = e^c,$$

если последовательность y_n ограничена.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{c}{n})^n &= e^{-c} = \text{т.к.} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{c}{n})^n \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{c}{n} + \frac{y_n}{n^2})^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{c^2}{n^2})^n = 1 \text{ по лемме из прошлого урока.} \end{aligned}$$

Теперь вычислим

$$\begin{aligned} e^{-c} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{c}{n} + \frac{y_n}{n^2})^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{c}{n})^n (1 + \frac{c}{n} + \frac{y_n}{n^2})^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(1 - \frac{c}{n})(1 + \frac{c}{n} + \frac{y_n}{n^2})]^n. \end{aligned}$$

Раскрываем скобки:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{c^2}{n^2} + \frac{y_n^2}{n^2} - \frac{cy_n}{n^3})^n = 1 \text{ по той же лемме!}$$

Отсюда $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n} + \frac{y_n}{n^2}\right)^n = e^c$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, функциональное уравнение

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ для } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ выполнено.}$$

То же самое можно доказать и для комплексных чисел.

Так что далее мы будем считать, что

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Мы доказали, что справедливо равенство:

$$e^{i\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n. \text{ Найдём этот предел.}$$

Рассмотрим единичную окружность на комплексной плоскости.

Пусть число n достаточно велико. Тогда $1 + \frac{i\varphi}{n}$ отличается от $\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}$ на величину порядка малости $\frac{1}{n^2}$. При очень маленьком значении аргумента $\sin x \sim x$, а $\cos x \sim 1$.

$$\text{Имеем } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n} + \frac{c_n}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}\right)^n. \text{ По лемме левая часть равна}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n$, а правая часть нам известна из уроков, посвящённых комплексным числам:

$$\left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}\right)^n = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Таким образом, $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Осталось подставить $\varphi = \pi$:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

Вспоминая, что $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, получаем формулу Эйлера: $e^{i\pi} = -1$.

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Используя экспоненциальный ряд, запишем:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \dots = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части, мы получаем степенные ряды для $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

На этом мы завершаем курс «100 уроков математики».