РАССТОЯНИЯ НА ОКРУЖНОСТИ

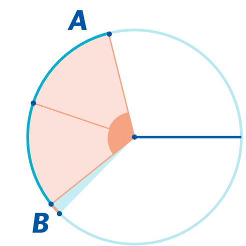
Окружность —

это фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся на одном и том же расстоянии от некоторой фиксированной точки.

Расстояния между точками на окружности будем измерять в радианах.

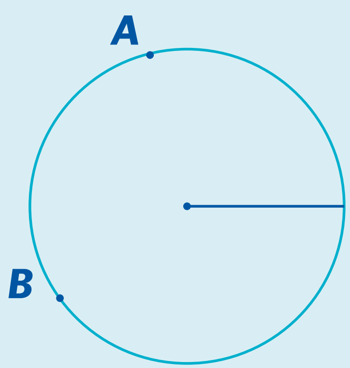
ПРИМЕР:

Чтобы измерить расстояние между точками A и B, нужно посмотреть, сколько друг, равных радиусу, уместится между этими точками.
В данном случае получится чуть больше 2 rad.



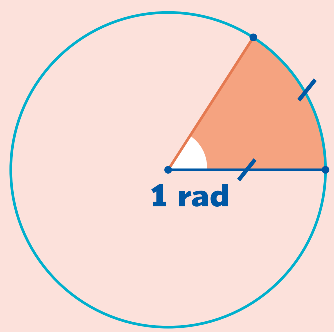
Движение окружности (g) —

это преобразование точек окружности, при котором не меняется расстояние между точками:
$\rho(A, B) = \rho(gA, gB)$.



Один радиан (1 rad) —

это угол, которому соответствует дуга окружности, длина которой равна радиусу.

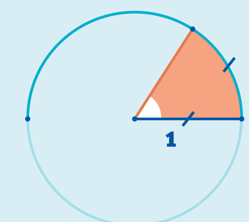


ВОПРОС: какое какое максимальное расстояние может быть между точками на окружности?

ОТВЕТ: расстояние максимально между противоположными точками и равно длине полуокружности.

Число π —

это длина полуокружности с радиусом, равным единице.



ДВИЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ

Повороты

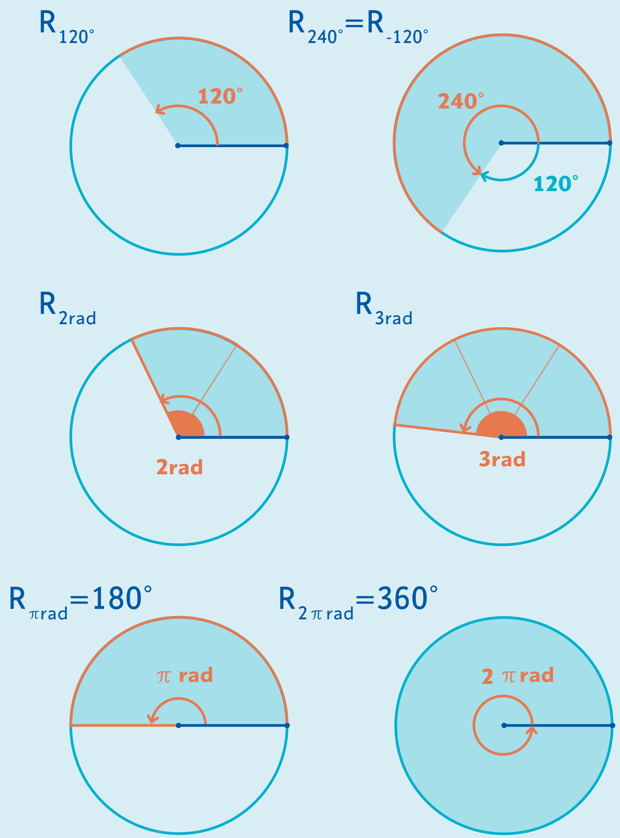
R_φ (от англ. Rotation) — поворот окружности на угол φ в положительном направлении (против часовой стрелки).

При движении R_φ все точки смещаются на заданный угол φ вдоль окружности.

Угол поворота можно измерять как в градусах, так и в радианах.

Повороты возможны на углы от 0° до 360° — или от 0 rad до 2π rad.

Если радиус окружности равен 1, то 1 rad = 1 и углы поворота принимают значения от 0 до 2π .

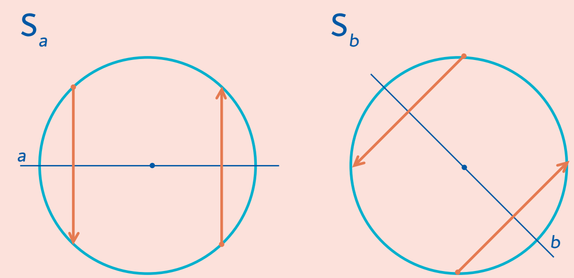


Отражения

S_l— отражение окружности относительно прямой *l*, проходящей через центр окружности (и две **противоположные** точки).

При движении S_l все точки переходят в симметричное положение относительно прямой *l*.

ПРИМЕРЫ:

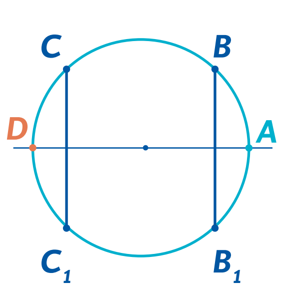


Осталось доказать, что других движений окружности не существует.

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ (НАЧАЛО)

Лемма 0

Если одна точка неподвижна, то и противоположная ей точка тоже неподвижна. Поэтому ровно одной неподвижной точки быть не может.

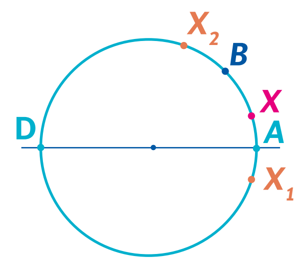


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть для движения g и точки A выполнено: $g(A) = A$. Тогда для остальных точек на окружности, чтобы сохранить расстояние до A, есть только два варианта: остаться на месте или отразиться относительно прямой, проходящей через точку A и центр окружности. Исключение — точка D, противоположная A: $\rho(A, D) = \pi$, а все остальные точки находятся на более ближнем расстоянии от A. Значит, точка D тоже останется на месте.

Лемма 1

Если есть три (равносильно: две непротивоположные) неподвижные точки, то движение является тождественным преобразованием.

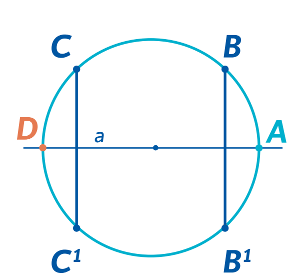


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $g(A) = A$ и $g(B) = B$.
Рассмотрим произвольную точку X между точками A и B. Предположим, что точка X не осталась на месте. Тогда, чтобы сохранить расстояние до A, она может переместиться только в X_1, а чтобы сохранить расстояние до B, она может переместиться только в X_2. Так как она не может переместиться одновременно в две точки, единственный вариант — это остаться на месте. И это верно для любой точки на окружности.

Лемма 2

Если неподвижных точек ровно две, то движение является отражением относительно некоторой прямой.



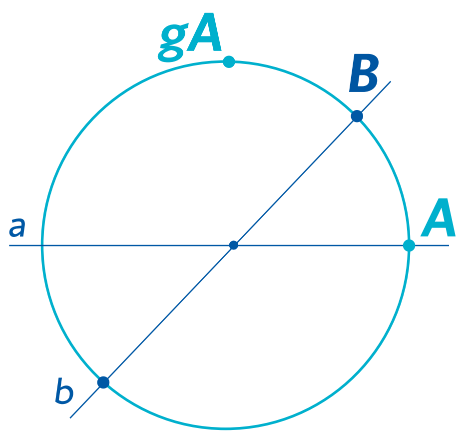
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть для противоположных точек A и D выполнено: $g(A) = A$, $g(D) = D$. Тогда для остальных точек на окружности, чтобы сохранить расстояние до A и D, но не остаться на месте, есть только один вариант: отразиться относительно прямой a, проходящей через точки A и D (и центр окружности). То есть движение является отражением относительно прямой a.

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Лемма 3

Если у движения нет неподвижных точек, то оно является поворотом на некоторый угол.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $g(A) = gA$. Рассмотрим точку B — середину между A и gA (не имеет значения, на большей или меньшей дуге).
Проведем прямую b — через B и центр окружности, а прямую a — через A и центр окружности.
Рассмотрим композицию $S_b \circ g$ и проследим за точкой A:
$S_b \circ g\,(A) = S_b(gA) = A$.
Следовательно, возможны два варианта:

1) $S_b \circ g = \mathrm{Id}$

2) $S_b \circ g = S_a$

Выполним вслед за левой и правой частью S_b:

$$S_b \circ S_b \circ g = S_b \circ \mathrm{Id}$$
$$(S_b \circ S_b) \circ g = S_b \circ \mathrm{Id}$$
$$\mathrm{Id} \circ g = S_b \circ \mathrm{Id}$$
$$g = S_b$$

По условию у g нет неподвижных точек, а у S_b есть (точка B).
Противоречие.

$$S_b \circ S_b \circ g = S_b \circ S_a$$
$$(S_b \circ S_b) \circ g = S_b \circ S_a$$
$$\mathrm{Id} \circ g = S_b \circ S_a$$
$$g = S_b \circ S_a$$

Противоречий нет.
Осталось доказать, что это движение — поворот.

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ (КОНЕЦ)

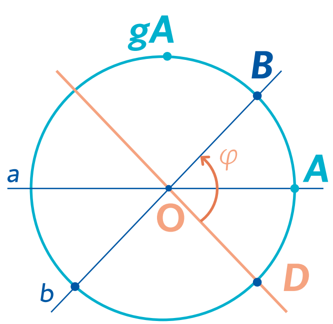
Докажем, что $g = S_b \circ S_a$ является поворотом на некоторый угол.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Отметим, что что точки *A* и *B* не могут быть друг другу противоположны:

B — это середина между *A* и *gA*, а *gA* (по построению) не может быть дальше, чем противоположная точка, поэтому $\angle BOA \leqslant 90^\circ$

Рассмотрим точку $D = S_a(B)$. Точки *A* и *D* тоже не противоположны друг другу. Обозначим за φ угол между *D* и *B* и применим композицию $S_b \circ S_a$ к точкам *A* и *D*.



1. $g(A) = S_b \circ S_a(A) = S_b(A) = gA = R_\varphi(A)$

$$g(A) = R_\varphi(A)$$

2. $g(D) = S_b \circ S_a(D) = S_b(B) = B = R_\varphi(D)$

$$g(D) = R_\varphi(D)$$

Выполним вслед за левой и правой частью $R_{-\varphi}$:

$$R_{-\varphi} \circ g(A) = R_{-\varphi} \circ R_\varphi(A)$$

$$R_{-\varphi} \circ g(D) = R_{-\varphi} \circ R_\varphi(D)$$

Повороты на одинаковые углы в противоположные стороны сокращаются:

$$R_{-\varphi} \circ g(A) = A$$

$$R_{-\varphi} \circ g(D) = D$$

Получили, что композиция $R_{-\varphi} \circ g$ оставляет на месте точки *A* и *D*.

Так как *A* и *D* не являются противоположными, получаем (по Лемме 1):

$R_{-\varphi} \circ g = \mathrm{Id}$.

Домножим обе части равенства на R_φ:

$R_\varphi \circ R_{-\varphi} \circ g = R_\varphi \circ \mathrm{Id}$,

откуда получим:

$\mathrm{Id} \circ g = R_\varphi \circ \mathrm{Id}$,

$g = R_\varphi$, то есть $g = S_b \circ S_a$ является поворотом на некоторый угол,

что и требовалось доказать.