ТАБЛИЦА КОМПОЗИЦИЙ ДВИЖЕНИЙ

На этом уроке мы завершим исследования движений прямой, заполнив таблицу их композиций (аналог школьной таблицы умножения):

	T_w	S_B
T_v	$T_v \circ T_w = ?$	$T_v \circ S_B = ?$
S_A	$S_A \circ T_w = ?$	$S_A \circ S_B = ?$

Мы представим каждый вектор, как «число со знаком» (и не будем писать стрелку над буквой, обозначающей этот вектор). Например, T_v при $v = 3$, то есть T_3 — это перенос на 3 единицы вправо, а T_{-2} — это перенос на 2 единицы влево.

НАПОМИНАНИЕ:

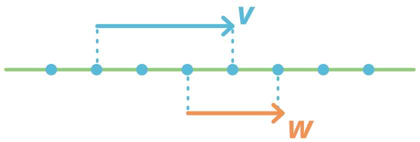
1. Любое движение прямой является либо отражением (S), либо переносом (T),
2. Порядок важен ($S_A \circ T_w \neq T_w \circ S_A$),
3. Движения выполняются справа налево ($S_A \circ T_w$ — сначала T_w, потом S_A).

Рассмотрим композицию $T_v \circ T_w$

Возможны следующие варианты:

ВЕКТОРЫ СОНАПРАВЛЕНЫ (ЧИСЛА ОДНОГО ЗНАКА):

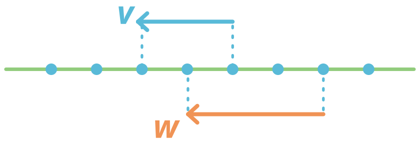
$w \geq 0, v \geq 0$



Пример $T_v \circ T_w$

$T_3 \circ T_2 = T_{2+3} = T_5$

$w < 0, v < 0$



Пример $T_v \circ T_w$

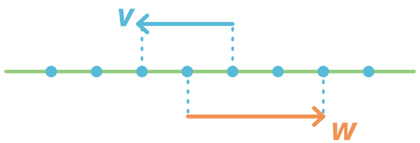
$T_{-2} \circ T_{-3} = T_{(-3)+(-2)} = T_{-5}$

ВЕКТОРЫ ПРОТИВОПОЛОЖНО НАПРАВЛЕНЫ (ЧИСЛА РАЗНЫХ ЗНАКОВ):

$w \geq 0, v < 0$

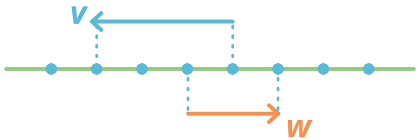
Пример $T_v \circ T_w$

$|w| \geq |v|$



$T_{-2} \circ T_3 = T_{3+(-2)} = T_1$

$|w| < |v|$

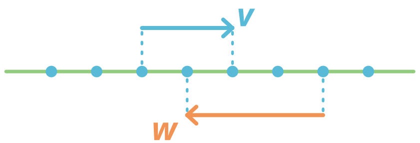


$T_{-3} \circ T_2 = T_{2+(-3)} = T_{-1}$

$w < 0, v \geq 0$

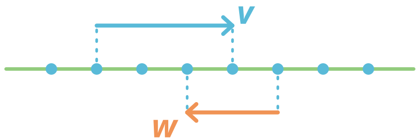
Пример $T_v \circ T_w$

$|w| \geq |v|$



$T_2 \circ T_{-3} = T_{-3+2} = T_{-1}$

$|w| < |v|$



$T_3 \circ T_{-2} = T_{-2+3} = T_1$

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

$|w|$ — длина вектора w

Рассмотрим любую точку на прямой и увидим, что во всех случаях точка смещается на сумму двух векторов *(см. справку «Сложение вещественных чисел»)*. Это редкий случай, когда композиция двух движений не зависит от их порядка: $T_{w+v} = T_{v+w}$.

	T_w	S_B
T_v	T_{v+w}	
S_A		

СПРАВКА: СЛОЖЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

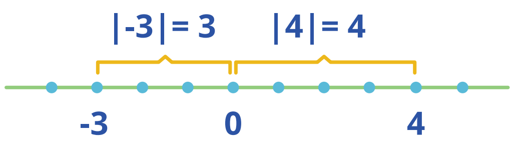
ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Вещественные числа — это все числа на числовой прямой: положительные, отрицательные и ноль.

Модуль числа *a*, |*a*| — «расстояние до нуля» (длина соответствующего вектора).

ПРИМЕРЫ:

|4| = 4, |-3| = 3, |0| = 0.



Чтобы сложить два числа **одного знака**, нужно сложить их модули и поставить общий знак.

ПРИМЕР С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ:

(-5) + (-7) = -12, так как 5 + 7 = 12, общий знак «-».

Чтобы сложить два числа **разных знаков**, нужно из большего модуля вычесть меньший модуль и поставить знак того числа, чей модуль больше.

ПРИМЕРЫ:

(-8) + 3 = 3 + (-8) = -5, так как |-8| > |3|, 8 - 3 = 5, знак «-».

(-8) + 10 = 10 + (-8) = 2, так как |10| > |-8|, 10 - 8 = 2, знак «+».

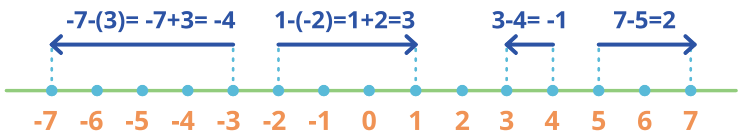
Рассмотрим композицию $S_A \circ S_B$

Варианты расположения точек *A* и *B*:

На прошлом уроке мы убедились, что $S_A \circ S_B$ — это **перенос**, но не указали, на какой именно вектор. Вектор можно обозначить как **разность двух точек**: вектор, идущий из точки *X* в точку *Y* естественно обозначить как разность (*Y*-*X*).

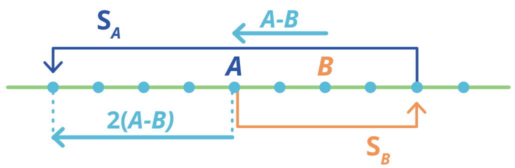
ПРОВЕРЬТЕ НА ЧИСЛАХ:

Используйте правило раскрытия скобок: a - (-b) = a + b

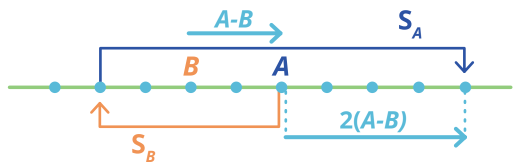


Так как известно, что $S_A \circ S_B$ — это перенос, достаточно проследить за одной точкой, например, точкой *A*, и определить вектор, на который она переместилась.

1. $S_A \circ S_B = T_{2(A-B)}$



2. $S_A \circ S_B = T_{2(A-B)}$



Для контроля и тренировки точно так же проследите за точкой *B*.

	T_w	S_B
T_v	T_{v+w}	
S_A		$T_{2(A-B)}$

ОТРАЖЕНИЕ ВСЛЕД ЗА ПЕРЕНОСОМ

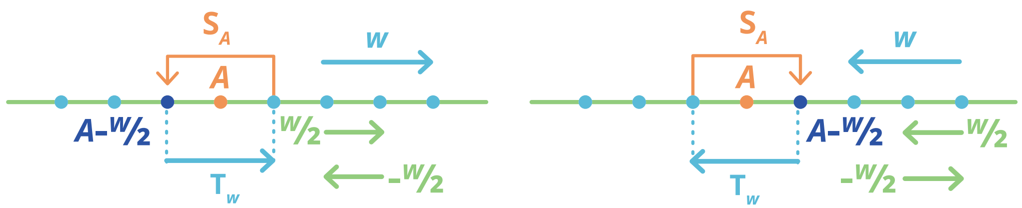
Рассмотрим композицию $S_A \circ T_w$

Возможны следующие варианты:

В обоих случаях точка *A* не останется на месте: сначала сместится на *w*, а потом отразится от своего исходного положения. Значит, $\mathbf{S_A \circ T_w \neq Id}$.

Если мы найдем неподвижную точку, то докажем, что $S_A \circ T_w$ — это отражение (а не перенос, у которого неподвижных точек нет).

Посмотрим, как композиция $S_A \circ T_w$ действует на точку $A\text{-}w/2$, полученную прибавлением к точке *A* вектора $-w/2$:



В обоих случаях точка $A\text{-}w/2$ осталась на месте, значит,
$\mathbf{S_A \circ T_w = S_{A-w/2}}$

	T_w	S_B
T_v	T_{v+w}	
S_A	$S_{A-w/2}$	$T_{2(A-B)}$

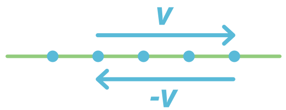
Рассмотрим композицию $T_v \circ S_B$ и выведем результат алгебраически.

Для этого воспользуемся свойствами и выражениями
для обратного отображения:

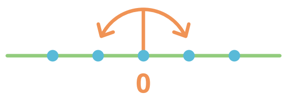
1. $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$

2. $(f^{-1})^{-1} = f$

3. $T_v^{-1} = T_{-v}$



4. $S_O^{-1} = S_O$



5. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

*Если **f** – отображение,*
*то **f**$^{-1}$ – обратное отображение.*

По **определению обратного отображения,** если $f(X)=Y$, то $f^{-1}(Y)=X$.

Пояснение к формуле (5):

ПУСТЬ f и g — отображения.
Чему равно отображение, обратное к композиции: $(f \circ g)^{-1} = ?$

ПРЕДПОЛОЖИМ, что $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$,
тогда, согласно свойству *(1)*,
$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = (f \circ g) \circ (f \circ g)^{-1} = \mathrm{Id}$.

ПРОВЕРЯЕМ: $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1}$
$= f \circ \mathrm{Id} \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$.

Предположение было верным.

Преобразуем $T_v \circ S_B$:

(используем свойства)

$$T_v \circ S_B \overset{(2)}{=} ((T_v \circ S_B)^{-1})^{-1} \overset{(5)}{=} (S_B^{-1} \circ T_v^{-1})^{-1} \overset{(3),(4)}{=} (S_B \circ T_{-v})^{-1} \overset{S_A \circ T_W = S_{A-W/2}}{=} (S_{B-(-V/2)})^{-1} = S_{B+V/2}$$

	T_W	S_B
T_V	T_{V+W}	$S_{B+V/2}$
S_A	$S_{A-W/2}$	$T_{2(A-B)}$

Мы заполнили таблицу композиций.

	T_w	S_B
T_v	$T_v \circ T_w = T_{v+w}$	$T_v \circ S_B = S_{B+v/2}$
S_A	$S_A \circ T_w = S_{A-w/2}$	$S_A \circ S_B = T_{2(A-B)}$

Потренируйтесь в вычислении результата композиции нескольких (двух и более) движений самостоятельно (например, с помощью конструктора из следующего шага урока).

ПОДГРУППА ПЕРЕНОСОВ

Композиция переносов и обратное преобразование к переносу тоже является переносом:

1. $T_v \circ T_w = T_{v+w}$

2. $T_v^{-1} = T_{-v}$

В таком случае говорят, что это подмножество движений прямой (переносы) **замкнуто** относительно взятия композиции и обратного преобразования.

Переносы образуют **подгруппу** в группе всех движений прямой.

ПЛАНЫ НА ПОСЛЕДУЮЩИЕ УРОКИ:

- движения окружности;
- растяжения (подобия);
- движения и подобия объектов бóльших размерностей.