НАЧАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ДВИЖЕНИИ ПРЯМОЙ.

Определение движения в математическом смысле

Движение в физическом смысле — это процесс перемещения.
Движение в математическом смысле — это результат перемещения.

Мы будем рассматривать движение в математическом смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Движение — это преобразование, которое сохраняет расстояния.

Это означает, что расстояние между любыми двумя точками объекта в результате перемещения не изменится.

На математическом языке:

$$\forall X,Y \quad \rho(gX, gY) = \rho(X,Y)$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

g *— движение;*

X, Y *— точки объекта;*

g*(*X*)** *или* ***gX *— движение точки* ***X*** *(ее положение после перемещения);*

ρ*(*X*,*Y*)** *— расстояние между точками* ***X *и* ***Y*;**

∀ *— «любой» (квантор всеобщности).*

ПРИМЕР

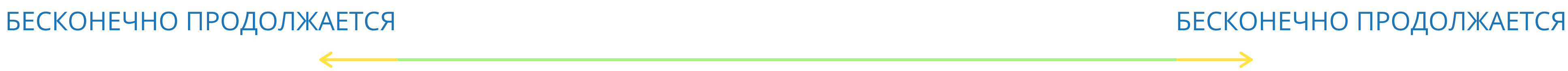
Полет самолета является движением, так как положение самолета в пространстве меняется, а расстояние между точками самолета — нет.

Изгибы и любые деформации не являются движением.

ПРИМЕР

Полет птицы не является движением, так как при взмахе крыла расстояние между его кончиком и хвостом птицы меняется.

НАЧАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ДВИЖЕНИИ ПРЯМОЙ.
Переносы и отражения



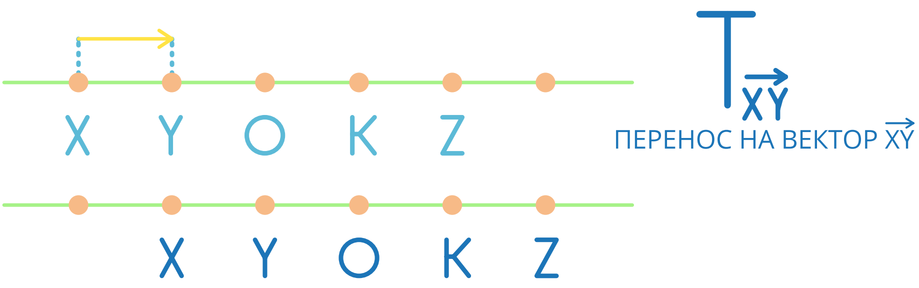
Прямая — это очень тонкая (бесконечно тонкая) ровная линия, продолжающаяся бесконечно в обе стороны.

Мы изучаем движение прямой без перемещения на плоскости или в пространстве, то есть рассматриваем только движение точек прямой на ней самой.

Точки могут менять положение (с сохранением расстояния между ними!), но прямая как нарисованный объект будет оставаться на месте.

КАКИЕ ВОЗМОЖНЫ ДВИЖЕНИЯ?

А) ПЕРЕНОС: выбираем вектор (направленный отрезок, то есть две точки прямой в фиксированном порядке) и каждую точку прямой перемещаем в заданном вектором направлении на расстояние, равное длине вектора.



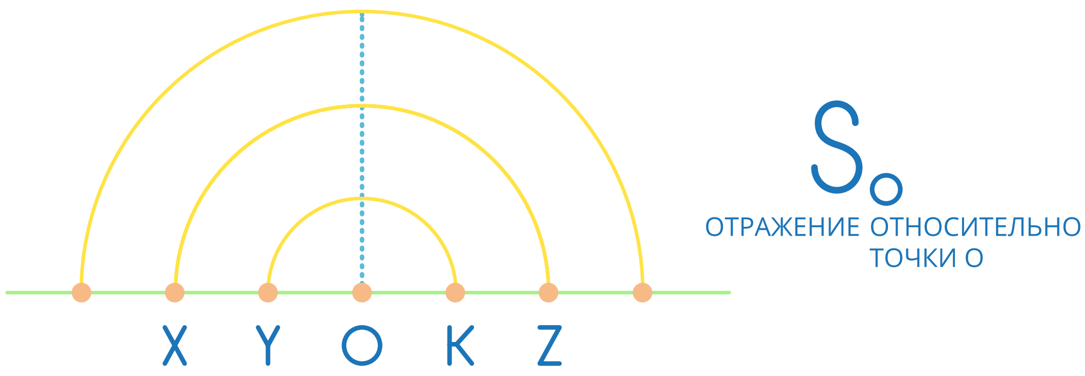
$T_{\overrightarrow{XY}}(X) = Y$, *то есть при переносе* **$T_{\overrightarrow{XY}}$** *точка* ***X*** *перейдет в точку* ***Y***.

$T_{\overrightarrow{XY}}(Y) = O$

$T_{\overrightarrow{XY}}(O) = K$

$T_{\overrightarrow{XY}}(K) = Z$

Б) ОТРАЖЕНИЕ: фиксируем одну точку, а все остальные «перепрыгивают» через нее на то же расстояние (но с другой стороны).



$S_O(Z) = X$ **$S_O(K) = Y$** **$S_O(Y) = K$** **$S_O(X) = Z$**, *то есть при отражении* **S_O** *точка* ***X*** *перейдет в точку* ***Z***.

$S_O(O) = O$, *то есть точка* ***O*** *останется на месте.*

ТЕОРЕМУ О ТОМ, ЧТО НИКАКИХ ДРУГИХ ДВИЖЕНИЙ ПРЯМОЙ, КРОМЕ ПЕРЕНОСА И ОТРАЖЕНИЯ, НЕ СУЩЕСТВУЕТ, МЫ ДОКАЖЕМ НА СЛЕДУЮЩЕМ УРОКЕ.

НАЧАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ДВИЖЕНИИ ПРЯМОЙ.
Композиция движений прямой. Часть 1

Движения интересны тем, что можно брать их композицию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Композиция — это последовательное выполнение двух или нескольких действий.

Например, можно сначала выполнить перенос на вектор $\overrightarrow{XY}$, а потом отразить относительно точки O. Или наоборот: сначала отразить, а потом перенести.

Композиция движений также является движением, так как каждое действие в композиции сохраняет расстояния между точками.

Как мы уже знаем (но еще не доказали), никаких движений прямой, кроме переносов и отражений, не существует.

Значит, композиция движений тоже будет либо переносом, либо отражением.

ОБОЗНАЧЕНИЕ

$\circ$ — *композиция.*

$T_{\overrightarrow{XY}} \circ S_O$ — сначала отражение (S_O) , затем перенос ($T_{\overrightarrow{XY}}$) — **шаги записываются и выполняются справа налево!**

Если применить композицию к некоторой точке Z, то можно записать так:

$$T_{\overrightarrow{XY}} \circ S_O(Z) = T_{\overrightarrow{XY}}(S_O(Z))$$

то есть $S_O(Z)$ (новую точку, которая получена в результате отражения точки Z относительно точки O), переносим на вектор $\overrightarrow{XY}$.

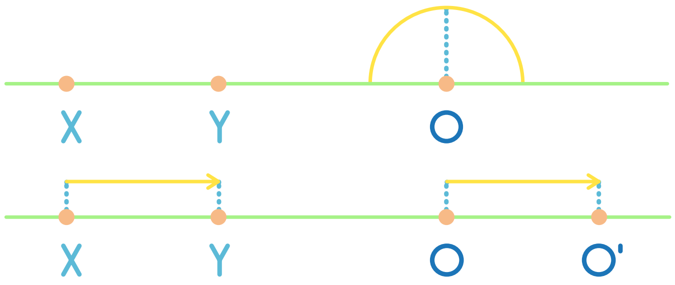
НАЧАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ДВИЖЕНИИ ПРЯМОЙ.

Композиция движений прямой. Часть 2

ЧЕМУ РАВНА КОМПОЗИЦИЯ $T_{\overrightarrow{XY}} \circ S_O$?

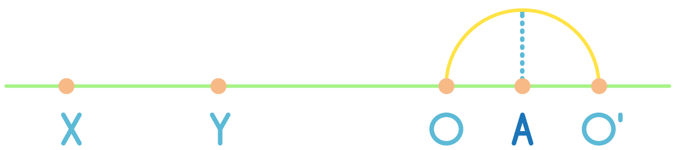
Сначала выполняем отражение $\mathbf{S}_O$, затем перенос $\mathbf{T}_{\overrightarrow{XY}}$.

Посмотрим, куда переходит точка ***O***. При отражении $\mathbf{S}_O$ точка ***O*** остается на месте, а затем при переносе $\mathbf{T}_{\overrightarrow{XY}}$ сдвигается на такой же длины вектор направо. Обозначим ее новое положение за ***O′***.



Но рано думать, что это перенос! Изучим поведение еще одной точки, например, точки ***O′*** *(если бы был перенос, она бы переместилась дальше направо)*.

При отражении точка ***O′*** «перепрыгивает» через точку ***O*** на то же расстояние. А затем при переносе переходит в точности в точку ***O*** (так как они находятся на расстоянии, равном длине вектора $\overrightarrow{XY}$).



Получаем, что т. ***O*** перешла в т. ***O′***, а т. ***O′*** перешла в т. ***O***. Видим, что это точно не перенос, а значит (по теореме), это отражение. Очевидно, отражение относительно т. ***A*** — середины отрезка ***OO′***:

$$T_{\overrightarrow{XY}} \circ S_O = S_A$$

Как вычислить положение точки ***A***? К т. ***O*** прибавляем половину вектора $\overrightarrow{XY}$:

УПРАЖНЕНИЕ

Поменяйте местами эти два преобразования и убедитесь, что результат будет другим: отражением относительно точки ***A′*** (полученной отступом влево от т. ***O*** на половину исходного вектора $\overrightarrow{XY}$):

$$S_O \circ T_{\overrightarrow{XY}} = S_{A'}$$