Урок 4. Бесконечные суммы (Ряды)

Как просуммировать бесконечное количество слагаемых?

ИСТОРИЯ: Три кузнечика (**А**, **Б** и **В**) прыгают от земли к луне, зависая в воздухе. Кузнечик устает – прыжок уменьшается:

	1 прыжок	2 прыжок	3 прыжок	
КУЗНЕЧИК **А**	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...
КУЗНЕЧИК **Б**	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	...
КУЗНЕЧИК **В**	1	0,99	$0{,}99^2$	...

На какой высоте окажется каждый кузнечик после бесконечного количества прыжков?

Когда-нибудь кузнечик допрыгнет до луны или не сможет подняться выше определенной высоты?

НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ:

Рассмотрим бесконечные суммы (ряды):

А. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = ?$

Б. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = ?$

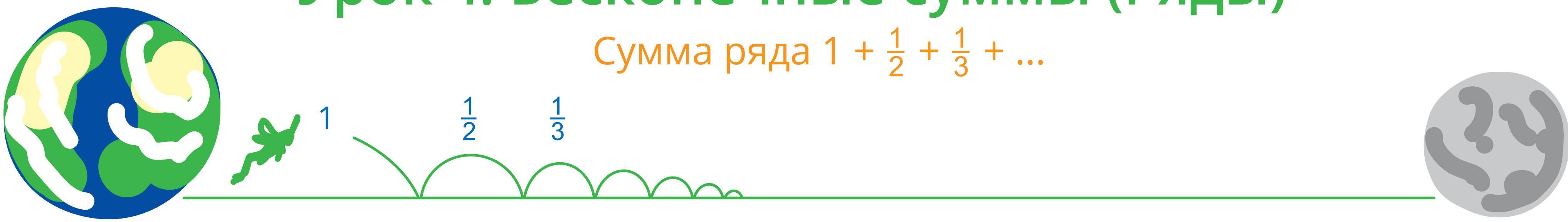
В. $1 + 0{,}99 + 0{,}99^2 + \ldots = ?$

Конечна или бесконечна каждая сумма?

Другими словами, равна ли она какому-то числу (и если да, то какому?) или будет бесконечно расти, превосходя любое наперед заданное число?

Урок 4. Бесконечные суммы (Ряды)

Сумма ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$



Чтобы доказать, что сумма ряда **конечна**, нужно попробовать **увеличить** её слагаемые таким образом, чтобы для новой (увеличенной) суммы стало очевидно, что она конечна.

Чтобы доказать, что сумма ряда **бесконечна**, нужно попробовать **уменьшить** её слагаемые таким образом, чтобы для новой (уменьшенной) суммы стало очевидно, что она бесконечна.

ДОКАЖЕМ БЕСКОНЕЧНОСТЬ СУММЫ: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \dots$

РАССМОТРИМ РЯД С УМЕНЬШЕННЫМИ СЛАГАЕМЫМИ: $1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}}_{2} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}}}_{4} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}^{\frac{1}{2}}}_{16} + \dots$

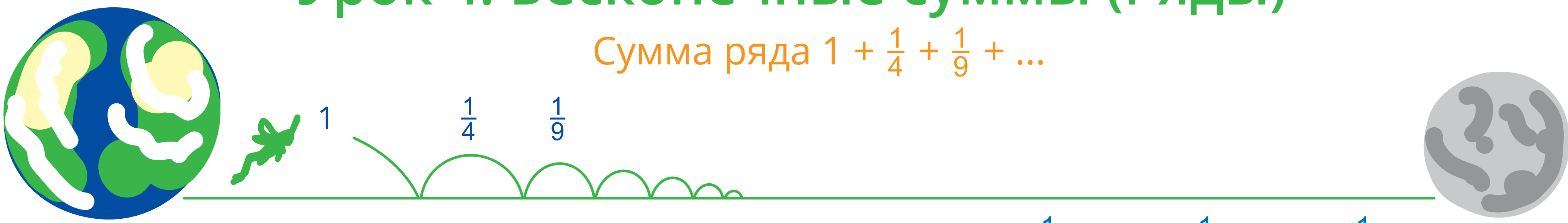
Новый ряд неограниченно растет, так как всегда можем уменьшить достаточное количество последовательных слагаемых так, чтобы в сумме получилась $\frac{1}{2}$. Новый ряд меньше, чем исходный. Значит, сумма исходного ряда тоже бесконечна.

НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ: $\forall A \exists n$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > A$

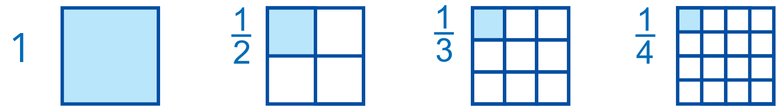
«Для любого числа **A** существует такое число **n**, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ больше **A**»

Урок 4. Бесконечные суммы (Ряды)

Сумма ряда $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$

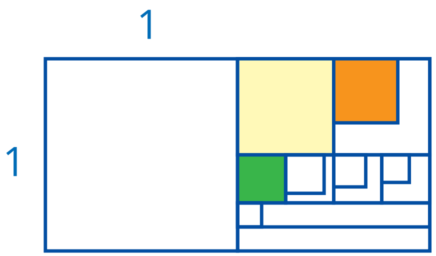


$$1 \quad + \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{9} \quad + \quad \frac{1}{16} \quad \dots$$



Докажем конечность суммы ряда геометрически.

Каждое слагаемое равно площади закрашенного квадрата.



В полосе шириной $\frac{1}{2}$ поместим 2 квадрата со сторонами $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$

В полосе шириной $\frac{1}{4}$ поместим 4 квадрата со сторонами $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$

В полосе шириной $\frac{1}{8}$ поместим 8 квадрата со сторонами $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots \frac{1}{15}$

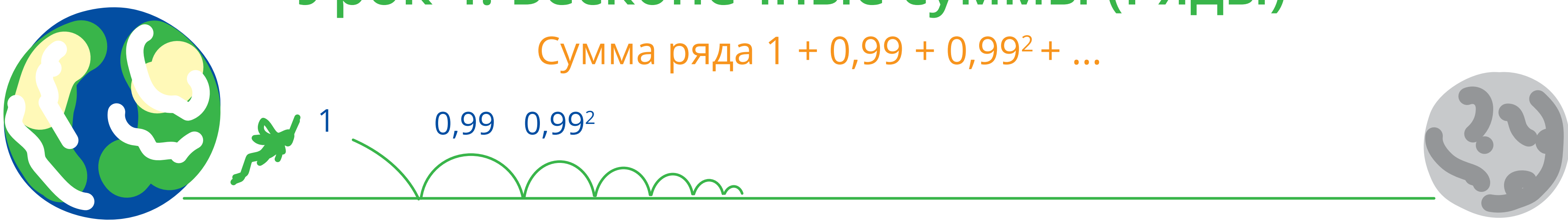
Этот процесс можно продолжать до бесконечности: разделим оставшуюся полосу пополам и поместим в нее новый набор квардатиков (и останется свободное место).

Значит, сумма бесконечного ряда слагаемых будет меньше суммы площадей двух квадратов со стороной 1, то есть меньше **2**.

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots < \mathbf{2}$ $\quad$ $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$,где π ([пи]) – это число, которое изучают в старших классах.

Урок 4. Бесконечные суммы (Ряды)

Сумма ряда $1 + 0{,}99 + 0{,}99^2 + \ldots$



Несмотря на то, что вначале этот кузнечик прыгает выше предыдущих, потом он сильно устаёт. Найдем, чему равна сумма ряда $1 + 0{,}99 + 0{,}99^2 + 0{,}99^3 + \ldots$ и тем самым покажем, насколько высоко сможет подняться этот кузнечик.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

- Для начала рассмотрим более простой случай (уменьшение прыжка не на 1%, а на 50%):

Каждый следующий прыжок – половина от предыдущего: Расстояние до **2** каждый раз сокращается вдвое, но никогда не превзойдет **2**.

При бесконечном суммировании сумма будет равна **в точности** **2**, так как бесконечно малых отрезков не существует.

- Вернемся к задаче. Предположим, что сумма ряда равна числу **x**: $1 + 0{,}99 + 0{,}99^2 + \ldots = x$ Тогда $0{,}99\,x = 0{,}99 + 0{,}99^2 + \ldots$

Если **x** – это конечное число, то в 99% от **x** входят все слагаемые, входящие в **x**, кроме первого: **1**.

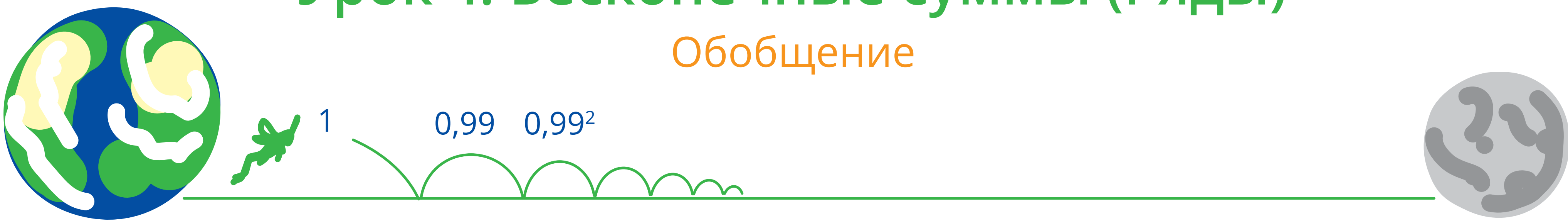
Получаем уравнение: $0{,}99\,x = x - 1$. Решим уравнение: $1 = 0{,}01\,x$, значит, $x = 100$.

- Осталось доказать что эта сумма действительно конечна, то есть $x < \infty$.

ЗАДАНИЕ: Убедиться, что $x < \infty$, показав, что расстояние до 100 будет сокращаться в одно и то же количество раз (аналогично ряду $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$). Тогда утверждение, что $x = 100$, будет верным.

Урок 4. Бесконечные суммы (Ряды)

Обобщение



Сумма ряда может быть **конечна** или **бесконечна** — это зависит от конкретных слагаемых, входящих в сумму. Прежде чем начать доказывать, нужно предположить, конечна или бесконечна сумма рассматриваемого ряда.

Чтобы доказать, что сумма ряда **конечна**, нужно либо попробовать **увеличить** эту сумму, увеличив её слагаемые, так, чтобы для новой суммы стало очевидно, что она конечна, либо показать конечность суммы **геометрически**.

Чтобы доказать, что сумма ряда **бесконечна**, нужно попробовать **уменьшить** эту сумму, уменьшив её слагаемые, так, чтобы для новой суммы стало очевидно, что она бесконечна.

Суммирование бесконечных рядов – сложная задача. Найти точное значение суммы иногда бывает сложнее, чем доказать, что она конечна.

МЫ РАССМОТРЕЛИ СЛЕДУЮЩИЕ ПРИМЕРЫ:

А. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \infty$

Б. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots < 2$

В. $1 + 0{,}99 + 0{,}99^2 + \ldots = 100$