1 ДЕЙСТВИЕ ГОМОМОРФИЗМА НА КЛАССАХ СОПРЯЖЕННОСТИ В S_3

Итак, на прошлом уроке мы выделили три класса сопряженности в S_3:

$$[\mathrm{Id}],\quad [(123),(132)],\quad [(12),(13),(23)].$$

Построим следующее отображение F: $S_3 \to S_6$: каждой перестановке $\sigma \in S_3$ мы будем ставить в соответствие результат сопряжения $\sigma \circ \delta \circ \sigma^{-1}$, где δ — набор из 6 элементов, который представляет собой все перестановки из S_3:

$$F\colon \sigma \to \sigma \circ \begin{array}{|c|}\hline Id \\ \hline (1\ 2) \\ \hline (1\ 3) \\ \hline (2\ 3) \\ \hline (1\ 2\ 3) \\ \hline (1\ 3\ 2) \\ \hline \end{array} \circ \sigma^{-1}$$

Результатом такого отображения будет некоторая перестановка на 6 символах:

$$\begin{bmatrix} Id & (1\ 2) & (1\ 3) & (2\ 3) & (1\ 2\ 3) & (1\ 3\ 2) \\ \sigma\cdot Id\cdot\sigma^{-1} & \sigma(1\ 2)\sigma^{-1} & \sigma(1\ 3)\sigma^{-1} & \sigma(2\ 3)\sigma^{-1} & \sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1} & \sigma(1\ 3\ 2)\sigma^{-1} \end{bmatrix}$$

Попробуем определить, какого типа перестановки из S_6 мы будем получать, осуществляя сопряжение перестановками из S_3.

Понятно, что F: $Id \to Id^*$, где Id^* — тождественное преобразование в S_6.
Рассмотрим сопряжение посредством транспозиции $(1\ 2)$:

$$(1\ 2)\circ \begin{array}{|c|}\hline Id \\ \hline (1\ 2) \\ \hline (1\ 3) \\ \hline (2\ 3) \\ \hline (1\ 2\ 3) \\ \hline (1\ 3\ 2) \\ \hline \end{array} \circ (1\ 2)^{-1} = \begin{array}{|c|l}\hline Id & \\ \hline (1\ 2) & \\ \hline (2\ 3) & \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} \text{Поменялись местами} \\ \hline (1\ 3) & \\ \hline (1\ 3\ 2) & \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} \text{Поменялись местами} \\ \hline (1\ 2\ 3) & \\ \hline \end{array}$$

Это соответствует следующей перестановке в S_6:

$$\left[\begin{array}{c|ccc|cc} Id & (1\ 2) & (1\ 3) & (2\ 3) & (1\ 2\ 3) & (1\ 3\ 2) \\ Id & (1\ 2) & (2\ 3) & (1\ 3) & (1\ 3\ 2) & (1\ 2\ 3) \end{array}\right]$$

И так для всех перестановок из S_3.

Заметим, что сопряжение посредством любой перестановки оставляет на месте Id. Любой элемент из следующего класса сопряжения $[(12),(13),(23)]$ сопряжение любой перестановкой переводит в элемент из этого же класса сопряженности. Точно так же с последним классом сопряженности $[(123),(132)]$.

> Таким образом, сопряжение действует внутри классов сопряженности, не выходя за их пределы. Это связано с тем, что сопряжение сохраняет цикленную структуру.

2 ГОМОМОРФИЗМ $S_n \to S_{n!}$

Такое же отображение можно рассматривать из любой группы перестановок S_n в группу $S_{n!}$

Сформулируем ключевое утверждение о нем:

УТВЕРЖДЕНИЕ

Такое отображение $F: S_n \to S_{n!}$ является гомоморфизмом групп.
То есть для любых перестановок $\sigma, \tau \in S_n$ выполнено равенство:

$$F(\sigma \circ \tau) = F(\sigma) \circ F(\tau).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим сопряжение композицией $\sigma \circ \tau$ строки δ, состоящей из всех перестановок $\delta_j \in S_n$
$\forall \delta_j \in S_n$ левая часть равенства означает:

$$F(\sigma \circ \tau) \circ \delta_j \circ (\sigma \circ \tau)^{-1} = \sigma \circ (\tau \circ \delta_j \circ \tau^{-1}) \circ \sigma^{-1}$$

т.к. $(\sigma \circ \tau)^{-1} = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$

А это есть не что иное как $\sigma \circ F(\tau) \circ \sigma^{-1}$, что в свою очередь есть как раз $F(\sigma) \circ F(\tau)$.

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ.

ОБРАЗ И ЯДРО ГОМОМОРФИЗМА

Вернемся к $F: S_3 \to S_6$ и изучим его структуру.

Заметим, что отображение $F: S_3 \to S_6$ «расслаивается» на более простые отображения, которые действуют каждое в своем классе сопряженности.

Поэтому мы на самом деле имеем дело с тремя гомоморфизмами:

$$F_1: S_3 \to S_1 = \{Id\}$$
$$F_2: S_3 \to S_3$$
$$F_3: S_3 \to S_2$$

Введем несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Ядром гомоморфизма $F: G \to H$ ($\mathrm{Ker}(F)$) называется подмножество элементов группы G, которые этот гомоморфизм переводит в Id.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Образом гомоморфизма $F: G \to H$ ($Im(F)$) называется подмножество группы H, в которое F переводит все элементы группы G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Изоморфизмом групп называется гомоморфизм $F: G \to H$, если он является взаимно однозначным отображением (разные элементы переходят в разные).
Если F — изоморфизм, то $Im(F) = H$, $\mathrm{Ker}(F) = Id$.

3

Гомоморфизм F_1 является тривиальным, то есть переводит всю группу в подгруппу, состоящую из одного Id ($Im(F_1) = Id$). Ядро отображения F_1 полностью совпадает с самой группой S_3 ($Ker(F_1) = S_3$).

F_2 — изоморфизм группы S_3 на саму себя.

Отображение F_3 является отображением группы S_3 в группу перестановок на 2-х символах, которая и состоит из двух элементов: Id^* ($\in S_2$) и транспозиции $(1\ 2)^*$, меняющей местами (123) и (132).

F_3 есть «знак» (четность) перестановки. F_3 переводит четные перестановки Id, (123) и (132) в Id^*, а транспозиции (12), (13) и (23) в транспозицию циклов (123) и (132).

Структура гомоморфизмов F_1, F_2, F_3

	F_1	F_2	F_3
образ	Id	S_3	S_2
ядро	S_3	$\{Id\}$	$\{Id, (123), (132)\}$

ТЕОРЕМА

Других гомоморфизмов из S_3 нет.

Это означает, что все гомоморфизмы, которые мы можем обнаружить, буду иметь точно такие же структуры образа и ядра, как F_1, F_2, F_3.
На следующем уроке мы докажем эту теорему.