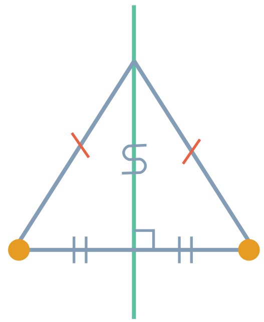
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК (ГМТ) — ЭТО ФИГУРА, СОСТОЯЩАЯ ИЗ ВСЕХ ТОЧЕК, ОБЛАДАЮЩИХ НЕКОТОРЫМ ОБЩИМ СВОЙСТВОМ.

Будем рассматривать геометрическое место точек, равноудаленных от заданных объектов:

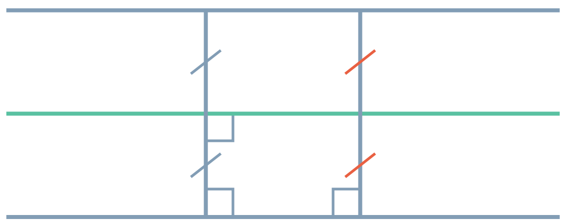
• ОТ ДВУХ ТОЧЕК



ГМТ: серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки.

Треугольники равны по двум сторонам и углу между ними ⇒ расстояния до точек равны.

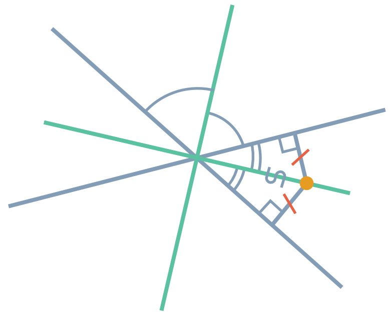
• ОТ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ



ГМТ: серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему прямые и перпендикулярному прямым.

Расстояния до прямых равны как стороны прямоугольника.

• ОТ ДВУХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ



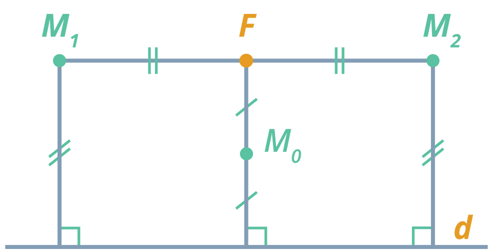
ГМТ: пара биссектрис.

Треугольники равны по стороне и двум прилегающим к ней углам ⇒ расстояния до прямых равны.

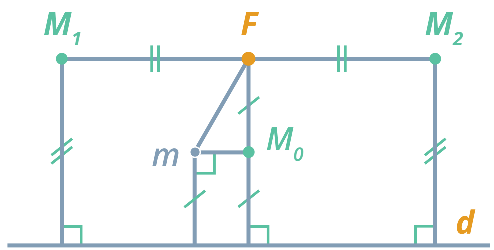
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАБОЛЫ

Рассмотрим геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки F и прямой d. Поэтапно найдем все точки, принадлежащие множеству $\mathcal{M} = \{M \mid MF = \boldsymbol{\rho}(M, d)\}$, где $\boldsymbol{\rho}(M, d)$ — расстояние от точки M до прямой d.

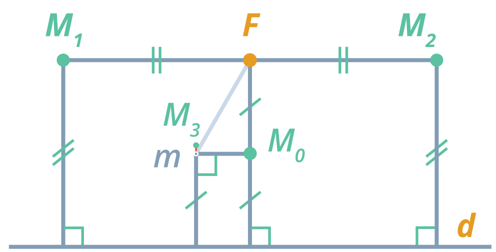
1. Очевидные решения: $M_0, M_1, M_2 \in \mathcal{M}$



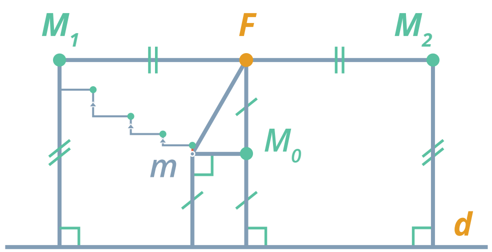
2. $m \notin \mathcal{M}$, так как гипотенуза в прямоугольном треугольнике длиннее катета.



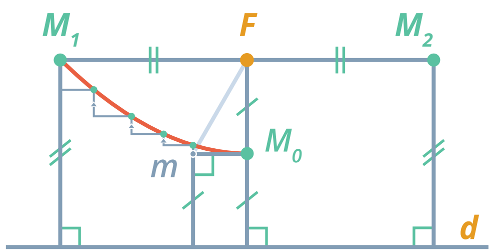
3. Значит, нужно подняться немного выше от точки m (чтобы удалиться от d и приблизиться к F).



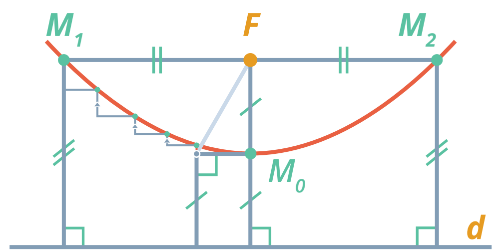
4. Двигаясь влево и поднимаясь вверх, мы можем отмечать точки, принадлежащие $\mathcal{M}$.



5. Если допустить, что шаг может быть сколь угодно маленьким, то мы получим непрерывную линию.



6. Линия симметрична. Полученная линия является **параболой.**



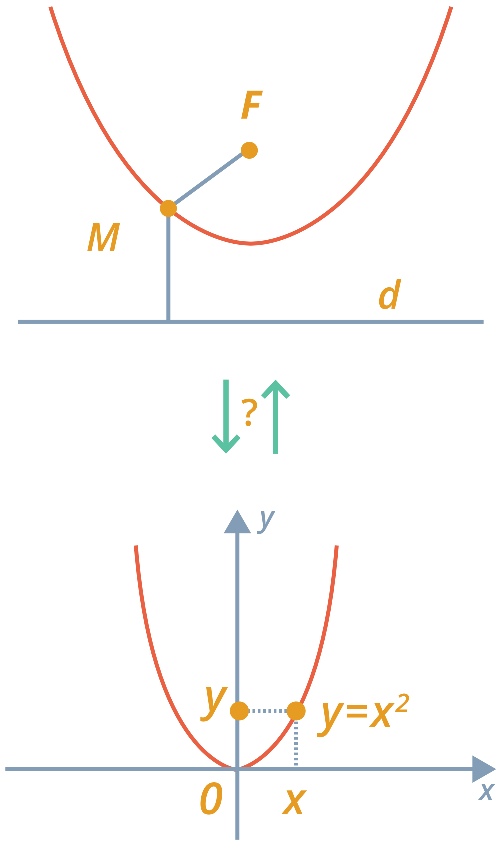
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАБОЛЫ: $\mathcal{M} = \{M \mid MF = \rho(M, d)\}$

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО И АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Мы получили геометрическое определение параболы,
но знаем и алгебраическое:

ПАРАБОЛА — ЭТО МНОЖЕСТВО ТОЧЕК С КООРДИНАТАМИ (x,y) НА ДЕКАРТОВОЙ ПЛОСКОСТИ, ДЛЯ КОТОРЫХ ВЫПОЛНЕНО СООТНОШЕНИЕ $y = x^2$ *(с точностью до коэффициента при x^2 и младших слагаемых).*

Как связать два определения? Можно ли из геометрического определения параболы получить алгебраическое и наоборот?



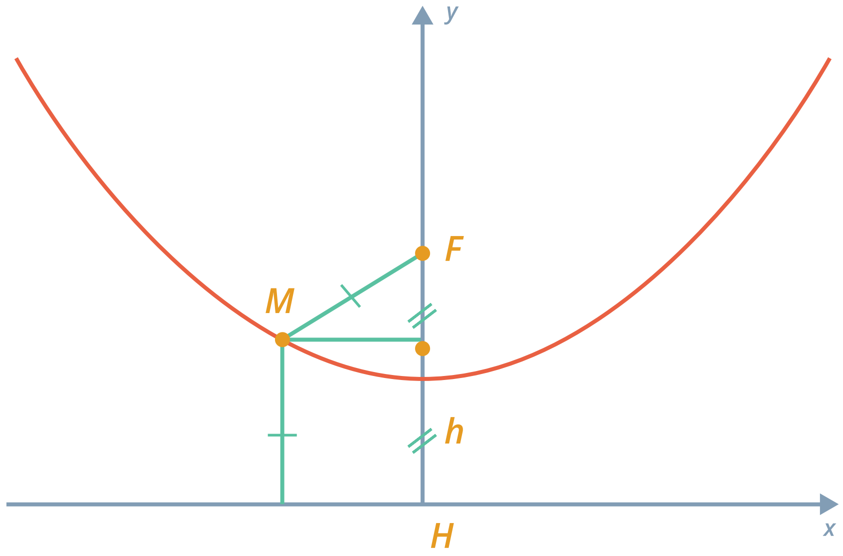
НАЧАЛО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

ОТ ГЕОМЕТРИИ К АЛГЕБРЕ

Введем координатные оси и попробуем, используя координаты, записать равенство отрезков.

Пусть $FH = 2h$.

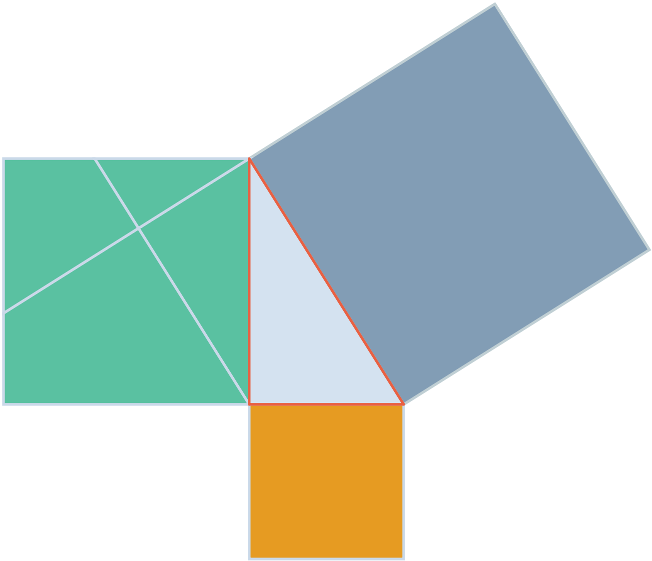
Проведем перпендикуляр из точки M на FH и рассмотрим прямоугольный треугольник.

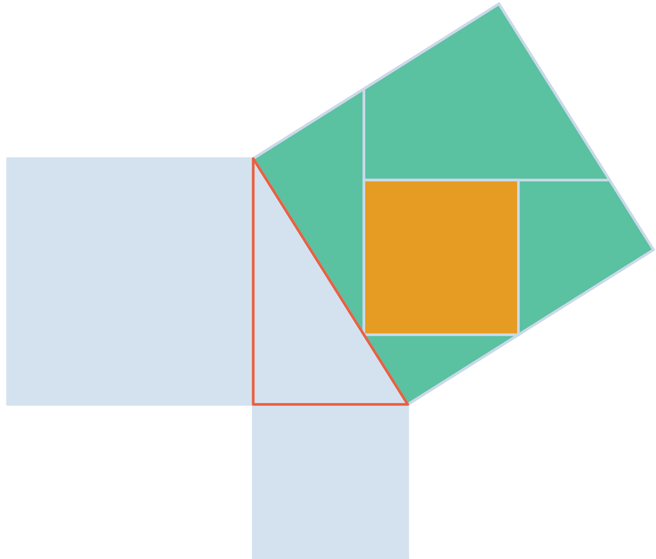


Для этого нам потребуется теорема Пифагора.

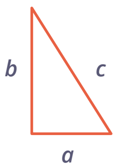
ИГРУШКА «ТЕОРЕМА ПИФАГОРА»

Рассмотрим прямоугольный треугольник, на сторонах которого построены квадраты. Маленький квадрат заполнен одной деталью, средний — специально подобранными четырьмя. Это не единственный подходящий набор деталей, есть и другие варианты.

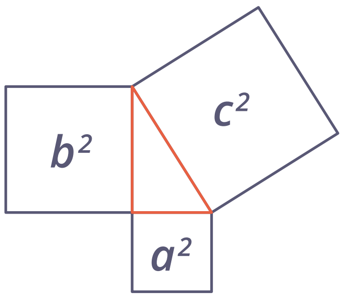




Теорема Пифагора утверждает, что сумма площадей маленького и среднего квадратов равна площади большого квадрата.
*(На формальном языке: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, то есть **$c^2 = a^2 + b^2$**)*



$$a^2+b^2=c^2$$

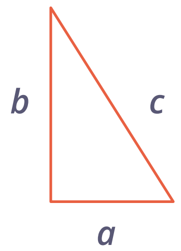


Это означает, что если мы сможем уложить в большой квадрат пять составных деталей маленького и среднего квадратов, то пустот между деталями не будет. Попробуйте сделать это в следующем шаге урока!

Также вы можете потренироваться с [другими вариантами разбиений.]()

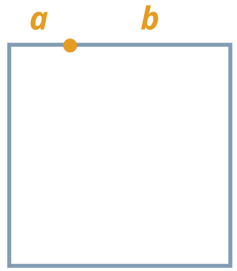
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

Мы хотим доказать, что в прямоугольном треугольнике $a^2 + b^2 = c^2$

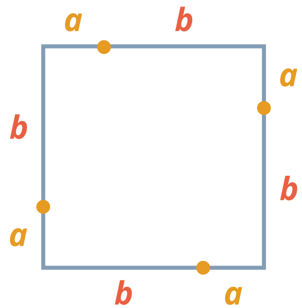


$$a^2+b^2=c^2$$

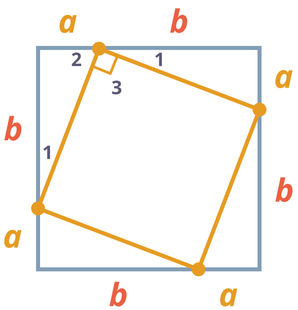
1. Рассмотрим произвольный квадрат и отметим точку на его стороне.
   Пусть расстояние от точки до одной вершины равно ***a***, а до другой — ***b***.

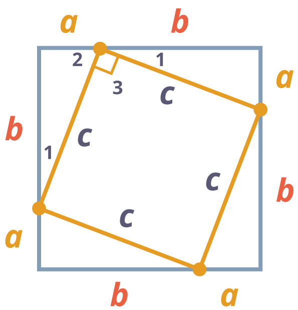


2. Отступим от остальных вершин так же на *a*. Оставшаяся часть каждой стороны равна *b* *(так как стороны квадрата равны)*.

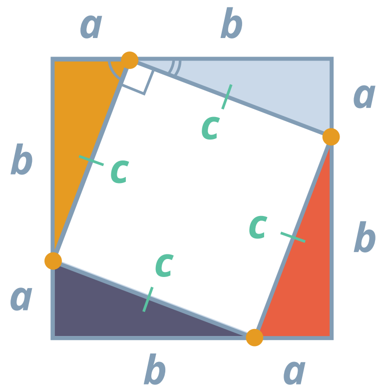


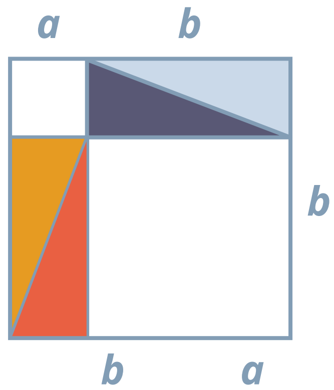
3. Если мы соединим все 4 точки, получим квадрат: его стороны равны *(так как все треугольники равны по двум сторонам и углу между ними)* — обозначим их за ***c***, а углы составляют 90° *(так как ∠1 + ∠2 = 90°, ∠1 + ∠2 + ∠3 = 180°)*.





4. Передвинем треугольники внутри квадрата, как показано на рисунке.





БЫЛО:

квадрат со стороной *c* и 4 треугольника

СТАЛО:

квадрат со стороной *a*, квадрат со стороной *b* и те же 4 треугольника.

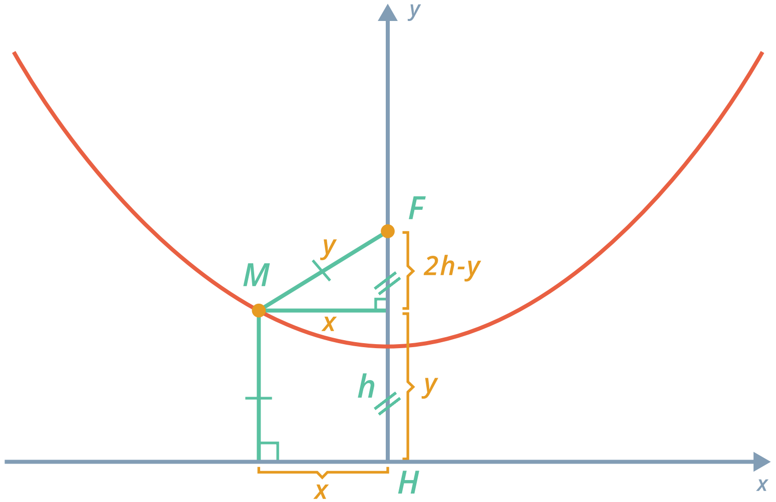
ЗНАЧИТ:

Сумма площадей квадратов со сторонами *a* и *b* равна площади квадрата со стороной *c*, то есть $a^2 + b^2 = c^2$, что и требовалось доказать.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО И АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЙ

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

У точки *M*, как у любой точки на плоскости, есть 2 координаты: *x* и *y*. *На чертеже первая координата точки M отрицательная, но нам удобнее работать с положительными числами, поэтому будем считать, что координаты такие: M(-x, y), x > 0, y > 0.* Значит, в рассматриваемом прямоугольном треугольнике горизонтальный катет равен *x*, вертикальный — 2*h*-*y*, а гипотенуза — *y* *(так как расстояния от точки M до фокуса и до директрисы должны быть равными — по геометрическому определению параболы).*



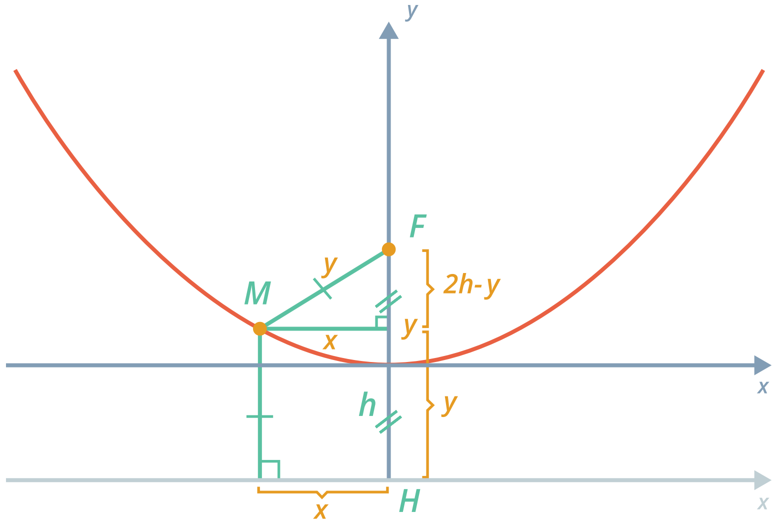
Запишем теорему Пифагора:

$$x^2+(2h-y)^2=y^2 \Longleftrightarrow x^2+4h^2-4hy+y^2=y^2 \Longleftrightarrow x^2+4h^2=4hy \Longleftrightarrow y=\frac{1}{4h}x^2+h$$

Получили параболу с точки зрения алгебры: связь вида $y = x^2$ с коэффициентом $\frac{1}{4h}$ и со сдвигом горизонтальной оси координат вниз на *h* относительно вершины параболы.

ОТ АЛГЕБРЫ К ГЕОМЕТРИИ

Если сдвинуть горизонтальную ось координат выше на *h*, парабола будет определяться уравнением $y = \frac{1}{4h}x^2$.



Это означает, что, имея алгебраическое уравнение параболы, мы можем сдвинуть оси так, чтобы начало координат совпало с вершиной параболы.

Тогда, используя коэффициент перед x^2, можно восстановить, где находятся точка *F* и прямая *d* из геометрического определения.

ВЫВОД

Мы показали, что любой объект, называемый параболой в геометрии, является параболой и с точки зрения алгебры, и наметили путь в обратную сторону. Попробуйте довести мысль до конца и убедитесь, что определения эквивалентны.

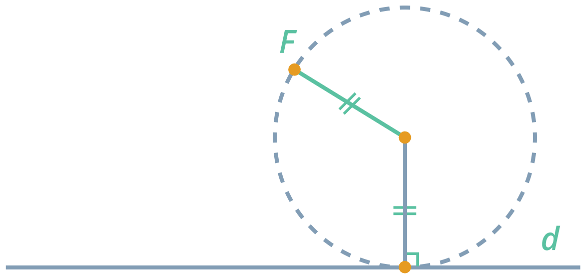
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ГМТ

ЗАДАЧА:

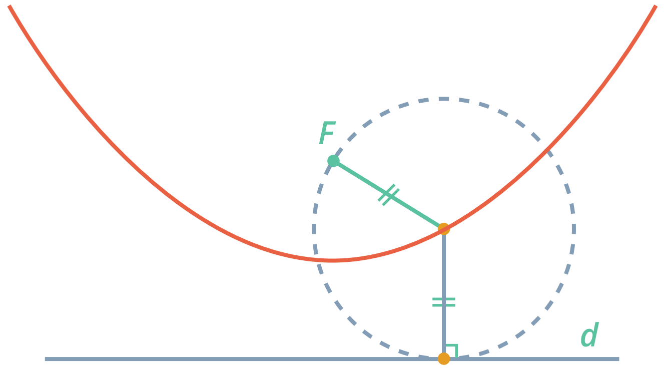
Найти множество центров окружностей, проходящих через заданную точку и касающихся заданной прямой.

РЕШЕНИЕ:

Зафиксируем произвольную окружность, удовлетворяющую условию.



Расстояния от центра окружности до точки *F* и до точки касания (то есть до прямой) — это радиусы окружности.
Значит, по определению, центр окружности лежит на параболе.



ОТВЕТ:

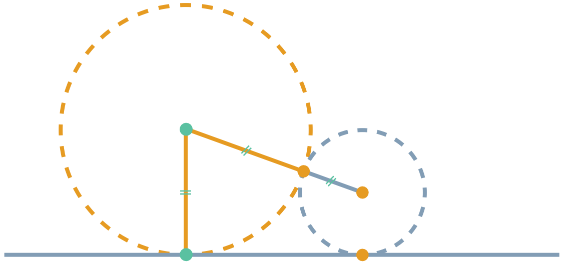
Искомое ГМТ — парабола.

ЗАДАЧА 2:

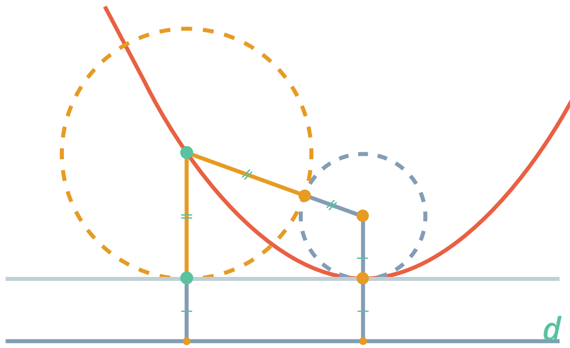
Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся заданной окружности и заданной прямой, касающейся той же заданной окружности.

РЕШЕНИЕ:

Зафиксируем произвольную окружность, удовлетворяющую условию. Расстояние от центра **зафиксированной окружности** до центра **заданной окружности** — это сумма двух разных радиусов,а до прямой — это один радиус.



Проведем еще одну прямую, которая будет ниже заданной прямой ровно на радиус заданной окружности. Тогда расстояние от центра зафиксированной окружности до центра заданной окружности и до новой прямой — это сумма двух радиусов.
Значит, по определению, центр окружности лежит на параболе.



ОТВЕТ: Центры окружностей лежат на параболе.

КОНТРОЛЬНЫЙ ВОПРОС: Является ли ГМТ целой параболой?