

ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ

КАКИЕ ЕСТЬ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ТАБЛИЦЕ?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	14	21	28	35	42	49	56	63	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

СИММЕТРИЧНОСТЬ

Таблица симметрична относительно главной диагонали из-за переместительного свойства (коммутативности) умножения:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

для всех вещественных a и b

(то есть для всех чисел, лежащих на числовой прямой).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ВОПРОС

Было бы то же самое для таблицы сложения? вычитания? деления?

СВОЙСТВО ЕДИНИЦЫ

Первый столбец (строка) повторяет «шапку» таблицы:

$$1 \cdot a = a$$

для всех вещественных a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ВОПРОС

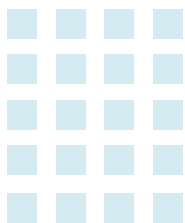
Для какого числа можно записать ответ в явном виде (без знаков арифметических действий в ответе) при умножении его на любое вещественное a ?

СПРАВКА: ДЕЛИМОСТЬ И ОСТАТКИ

Можем представить делимость числа a на число k как a «солдати́ков», которые выстроились в ряды по k «солдати́ков» в каждом.

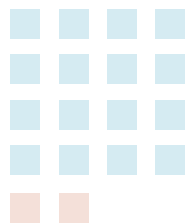
ПРИМЕРЫ

$$a = 20, k = 4$$



Если все ряды заполнены полностью, то a делится на k **нацело** (без остатка).

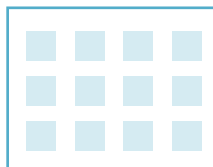
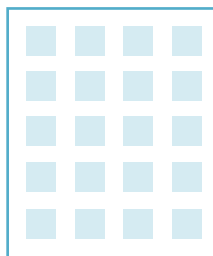
$$a = 18, k = 4$$



Если в последний ряд заполнен не до конца, то количество «солдати́ков» в нем является остатком от деления a на k (а количество полностью заполненных рядов – целой частью от деления a на k).

СВОЙСТВА

Если два числа делятся на k , то их сумма делится на k :

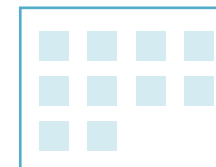
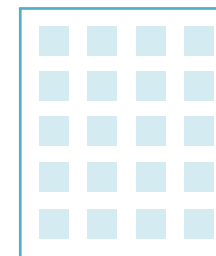


ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

Если число a делится на k , то все кратные числа a тоже делятся на k .



Если одно число делится на k , а другое нет, то их сумма не делится на k :



ВОПРОС

Если оба числа не делятся на k , то что можно сказать про их сумму? Приведите примеры.

3 ДЕЛИМОСТЬ НА 5

В строке (столбце) умножения на 5 все числа оканчиваются на 0 или на 5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Почему? Рассмотрим пример.

Любое число можно представить как $10x+y$, где y — это последняя цифра числа. Например, $121 = 10 \cdot 12 + 1$.

Первое слагаемое, очевидно, делится на 5 (так как 10 делится на 5, а $10x$ кратно 10). Значит, сумма будет делиться на 5, только если второе слагаемое будет делиться на 5 (или равняться 0 — тогда сумма будет равна первому слагаемому, делящемуся на 5).

Отсюда получаем, что последняя цифра может быть только 5 или 0, так как других чисел, делящихся на 5 и записывающихся одной цифрой, не существует.

ДЕЛИМОСТЬ НА 2

В строке (столбце) умножения на 2 все числа оканчиваются на четную цифру.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ЗАДАНИЕ

Проведите рассуждения, аналогичные делимости на 5.

4 ДЕЛИМОСТЬ НА 9

УМНОЖЕНИЕ «НА ПАЛЬЦАХ»

В строке (столбце) умножения на 9 первые цифры (число десятков) идут подряд от 0 до 9, а вторые (число единиц) — от 9 до 0.

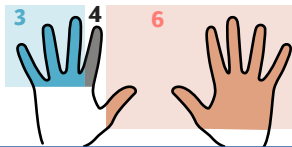
9	09	18	27	36	45	54	63	72	81	90
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

9	09	18	27	36	45	54	63	72	81	90
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Это свойство можно представить как умножение «на пальцах»: отсчитываем слева направо и загибаем палец, «на который» хотим умножить. Тогда количество пальцев слева — число десятков, а справа — число единиц.

НАПРИМЕР

$$9 \cdot 4 = 36$$



Как это доказать?

Пусть мы хотим умножить 9 на k — загибаем палец k .

Тогда слева пальцев $k-1$, а справа — $10-k$.

Предполагаем, что 10, умноженное на количество пальцев слева, плюс количество пальцев справа будет равно $9k$, то есть $10(k-1) + (10-k) = 9k$.

ДЕЛИМОСТЬ НА 3

Признак делимости на 9:
сумма цифр делится на 9.

Признак делимости на 3:
сумма цифр делится на 3.

ПРОВЕРИМ НА ПРИМЕРЕ

Рассмотрим число 121.

Разложим по разрядам:

$$121 = 100 + 20 + 1 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1$$

Представим числа, кратные 10, как сумму единицы и числа, состоящего из девяток:

$$1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 =$$

$$= 1 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 1 \cdot 1.$$

Раскроем скобки и перегруппируем:

$$1 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 1 \cdot 1 =$$

$$= 1 \cdot 99 + 1 + 2 \cdot 9 + 2 + 1 =$$

$$= (1 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + (1 + 2 + 1)$$

Сумма в первых скобках делится на 9, так как числа, состоящие только из 9, делятся на 9

(например, $9999 = 1111 \cdot 9$ делится на 9).

Сумма во вторых скобках представляет собой сумму цифр исходного числа.

Задание: доведите рассуждение до конца.

ЗАДАНИЕ

Проведите рассуждения, аналогичные разбору признака делимости на 9.

ЗАДАНИЕ

Раскройте скобки и убедитесь, что равенство верно.

5 ГЛАВНАЯ ДИАГОНАЛЬ (1, 4, 9, 16, ...)

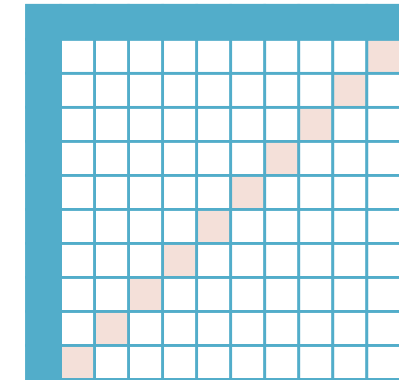
Каждое число на диагонали:

- является квадратом числа,
- отличается от предыдущего на нечетное число,
- нечетные числа, на которые отличаются последовательные квадраты, так же последовательно увеличиваются:
 $1 + 3 = 4$, $4 + 5 = 9$, $9 + 7 = 16$, ...

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Найдите и разберите закономерности на побочной диагонали таблицы умножения и параллельных ей:



Другими словами: сумма подряд идущих нечетных чисел является квадратом какого-то числа.

ДОКАЖЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ

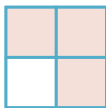
Число 1

— это квадрат со стороной 1:



Число 4

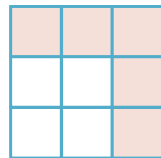
— это квадрат со стороной 2:



отличается от 1 на 3 квадрата

Число 9

— это квадрат со стороной 3:



отличается от 4 на 5 квадратов, и так далее

Каждый следующий квадрат отличается от предыдущего на «уголок», состоящий из нечетного количества квадратов. Причем каждый следующий уголок отличается от предыдущего на 2 квадрата — ровно такая разница между последовательными нечетными числами.

ЗАДАНИЕ

Проведите аналогичные рассуждения для диагонали, расположенной под главной.