1 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УМНОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

На прошлых уроках мы получили формулу для произведения двух комплексных чисел:

$$z = a + bi,\ w = c + di \quad \Rightarrow \quad zw = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Наша цель: увидеть на комплексной плоскости, что происходит с комплексным числом при его умножении на другое комплексное число.

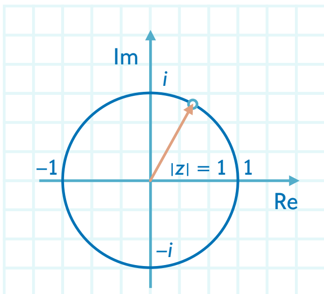
Мы уже узнали, что модуль произведения равен произведению модулей. Осталось понять, где конкретно на окружности радиуса $|zw|$ лежит число zw.

Проще всего увидеть результат умножения на комплексной плоскости с помощью так называемой тригонометрической формы комплексного числа.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Рассмотрим все такие комплексные числа z, что $|z| = 1$. Все эти точки в комплексной плоскости образуют окружность единичного радиуса.

Если число $z = a + bi$ лежит на единичной окружности, то $a^2 + b^2 = 1$.



В частности, точки 1, i, -1, $-i$ лежат на единичной окружности:

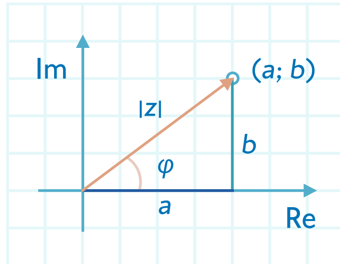
$$|i| = |0 + 1 \cdot i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \quad |-i| = 1.$$

Если $M(a; b)$ — произвольная точка на координатной плоскости, и расстояние от нее до начала координат равно некоторому числу r, то рассматривая вектор OM как комплексное число с модулем r, можем записать уравнение окружности с центром в точке $O(0; 0)$ и проходящей через точку M:

$$|z| = r \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = r^2.$$

Итак, все комплексные числа, имеющие одинаковый модуль, образуют окружность на комплексной плоскости. Каждому из них мы можем сопоставить угол φ между положительным направлением вещественной оси и вектором данного комплексного числа $(0 \le \varphi < 2\pi)$.

Этот угол называется аргументом комплексного числа и обозначается $\varphi = \arg z$.



Понятно, что аргумент определен с точностью до $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

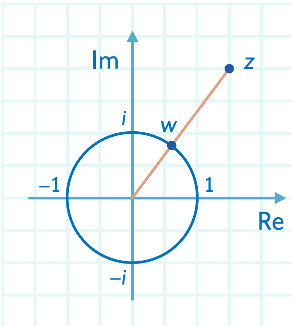
Задание комплексного числа через $|z|$ и $\arg z$ называется **тригонометрической формой** комплексного числа.

В то время, как алгебраическая форма комплексного числа связана с декартовой системой координат (x, y), тригонометрическая форма связана с так называемой полярной системой координат (r, φ).

2 АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМЫ

Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа эквивалентны.

Зная модуль $|z| = r$ комплексного числа и его аргумент $\arg z = \varphi$, мы можем построить на комплексной плоскости окружность радиуса r и отложить от положительной полуоси вещественной оси угол φ. Так мы найдем координаты (a, b) данного комплексного числа.



Обратно, пусть $z = a + bi$.
Представим $z = |z|w$, где w лежит на единичной окружности ($|w| = 1$).

Тогда $w = \cos\varphi + i\sin\varphi$ просто по определению тригонометрических функций $\sin$ и $\cos$.

Тогда $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Умножение произвольного комплексного числа s на данное комплексное число z можно рассматривать как композицию двух преобразований:

$$s \to |z|s \to |z|s \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

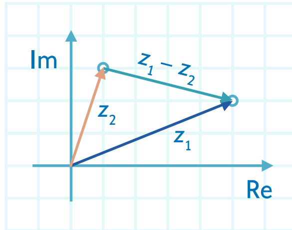
Первая часть представляет собой растяжение обеих координат числа s в одно и то же число раз (это **гомотетия** с коэффициентом $|z|$).

Осталось разобраться со второй частью.

УМНОЖЕНИЕ НА КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО ЕДИНИЧНОГО МОДУЛЯ

Итак, исследуем умножение на число w, лежащее на единичной окружности: $s \to s \cdot w$, где $|w| = 1$.

Пусть z_1, z_2 — произвольные комплексные числа. Тогда расстоянием между ними на комплексной плоскости будет модуль их разности $|z_1 - z_2|$.



Покажем, что умножение

$$|wz_2 - wz_1| = |w(z_2 - z_1)| = |w||z_2 - z_1|.$$

Вспоминаем, что $|w| = 1$. Получаем:

$$|wz_2 - wz_1| = |z_2 - z_1|.$$

Таким образом, умножение на комплексное число единичного модуля сохраняет расстояния. Значит, это преобразование является **движением**!

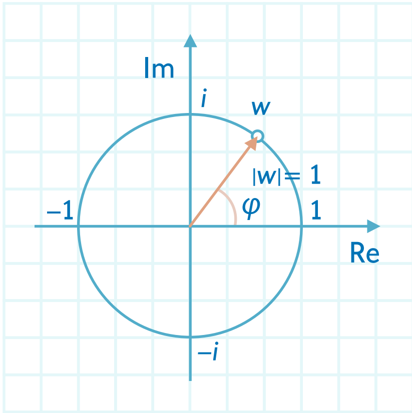
На уроках 31-35 мы познакомились со всеми возможными движениями плоскости, а также научились определять их по количеству неподвижных точек. Определим количество неподвижных точек у умножения на w.

Пусть для некоторого $s \in \mathbb{C}$ $ws = s$.
Если $w = 1$, то умножение на w есть просто Id — тождественное преобразование: $1 \cdot s = s \quad \forall s \in \mathbb{C}$.
Пусть $w \neq 1$.
Тогда $ws = s \iff (w - 1)s = 0 \iff s = 0$ — единственная неподвижная точка.

Единственную неподвижную точку имеет поворот!

Осталось понять, на какой угол.

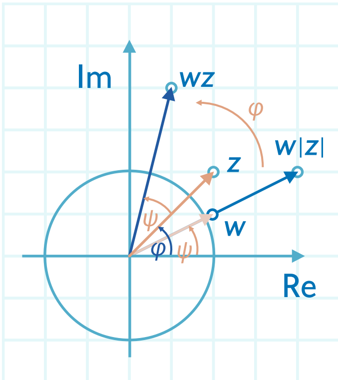
Для этого возьмем $s = 1$ и посмотрим, в какую точку комплексной плоскости переходит единица. $w \cdot 1 = w$, следовательно поворот происходит в точности на угол $\varphi = \arg w$.



УМНОЖЕНИЕ НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО

Пусть z — фиксированное комплексное число. Тогда умножение на число z есть композиция поворота на $\varphi = \arg z$ и растяжения в $|z|$ раз.

Если комплексное число имеет аргумент ψ, произведение его с числом z будет иметь аргумент $\psi + \varphi$.



При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Это ключевое свойство всей математики, что в умножении комплексных чисел происходит переплетение операций сложения и умножения.

Комплексное число отождествляется с поворотной гомотетией плоскости, которая возникает при умножении точек плоскости на это число.

ПРИМЕРЫ

$(a + bi)i = -b + ai$ — поворот на 90°;

$(a + bi)(-1) = -a - bi$ — поворот на 180°;

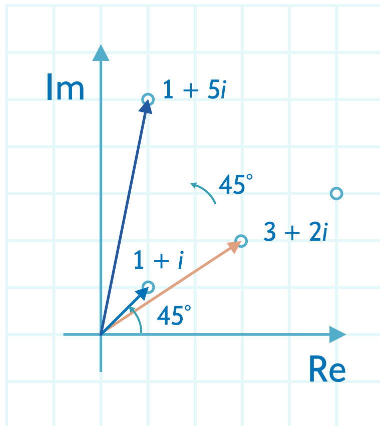
$(a + bi)(-i) = b - ai$ — поворот на 270°.

Все эти точки лежат в вершинах квадрата.

$(3 + 2i)(1 + i) = 1 + 5i$

$1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

Умножение на это число есть растяжение в $\sqrt{2}$ раз и поворот на 45°.



4 ФОРМУЛЫ СИНУСА СУММЫ И КОСИНУСА СУММЫ

Рассмотрим одно из приложений произведения комплексных чисел к школьному курсу математики.

Возьмем на единичной окружности два произвольных комплексных числа z_1 и z_2 с аргументами φ и ψ.

Тогда: $z_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $z_2 = \cos\psi + i\sin\psi$.

Рассмотрим их произведение.

С одной стороны, $z_1 \cdot z_2 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) =$
$= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)$.

С другой стороны, $z_1 \cdot z_2 = \cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)$.

Из равенства двух комплексных чисел следует равенство их вещественных и мнимых частей.

Отсюда мы получаем две важнейшие тригонометрические формулы:

$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$
— формула косинуса суммы;

$\sin(\varphi + \psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$
— формула синуса суммы.