1 ПОЯВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ В $\mathbb{R}$

Общий вид квадратного уравнения:

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$

Разделим уравнение на коэффициент $a \neq 0$ и выделим полный квадрат:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Мы получили, что $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a^2}$,
где $D = b^2 - 4ac$ – **дискриминант** квадратного уравнения.

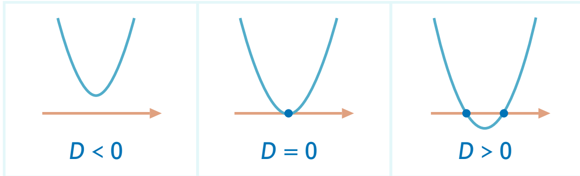
Если $D > 0$, то уравнение имеет 2 корня в $\mathbb{R}$:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

Если $D = 0$, то уравнение имеет 1 корень в $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$
Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней в $\mathbb{R}$.

Геометрически решение уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ соответствует поиску точек пересечения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ с осью абсцисс.

Возможны три ситуации:



Итак, если вещественные корни квадратного уравнения существуют, мы можем их найти по формуле. В случае кубических уравнений ситуация гораздо сложнее и красивее.

КУБИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В $\mathbb{R}$

Рассмотрим кубическое уравнение:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Кубическая функция принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$, а значит обязательно пересекает ось абсцисс, и уравнение имеет хотя бы один корень.

Сделав некоторые преобразования и замены переменной типа $a\,(x + \frac{b}{3a})^3 + \ldots$ можно любое кубическое уравнение привести к виду:

$x^3 - 3px - 2q = 0$

Никто не умел решать это уравнение до 16-го века, когда Кардано и Тарталья нашли метод и получили формулы для корней.

ФОРМУЛА КАРДАНО ДЛЯ РЕШЕНИЯ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Будем искать решение уравнения $x^3 - 3px - 2q = 0$ в виде суммы $x = \alpha + \beta$.

Тогда: $x^3 = (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta x$

Подставляем в уравнение:

$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta x - 3px - 2q = 0$

Чтобы равенство было выполнено, α и β должны удовлетво-

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = 2q \\ \alpha\beta = p \end{cases}$$

, которая равносильна такой:

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = 2q \\ \alpha^3\beta^3 = p^3 \end{cases}$$

По теореме Виета это означает, что α^3 и β^3 являются корнями уравнения $y^3 - 2qy + p^3 = 0$.

Итак, мы свели кубическое уравнение к квадратному, корни которого могут быть найдены по формуле:

$y = q \pm \sqrt{q^2 - p^3}$. Это и есть α^3 и β^3. А значит,

$x = \alpha + \beta = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$

Это **формула Кардано** для корней кубического уравнения.

ПАРАДОКС ФОРМУЛЫ КАРДАНО

Рассмотрим пример кубического уравнения, которое имеет три вещественных корня: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3$.
Оно может быть записано в виде:

$$(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

Найдем p и q:

$$x^3 - 3\left(\frac{7}{3}\right)x - 2(-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{7}{3},\ q = -3$$

По формуле Кардано корнем этого уравнения является:

$$x = \sqrt[3]{-3 + \sqrt[3]{3^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt[3]{3^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$$

Парадокс: с одной стороны, имеем три вещественных корня, а с другой — формула с квадратным корнем из отрицательного числа.

Введение комплексных чисел позволяет извлекать корни из отрицательных чисел и разрешает этот парадокс.

3 МНИМАЯ ЕДИНИЦА И КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО

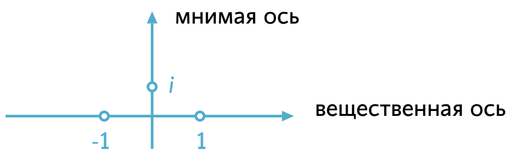
ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Мнимой единицей называется число $i = \sqrt{-1}$

Появление мнимой единицы позволяет не только извлекать квадратный корень из отрицательного числа, но получить разложение для суммы квадратов:

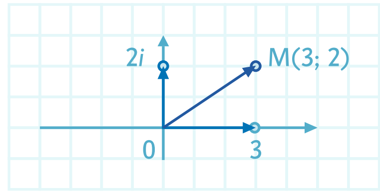
$$x^2 + y^2 = x^2 - (-y^2) = x^2 - (yi)^2 = (x - yi)(x + yi)$$

Мнимая единица лежит вне вещественной прямой.
Мы всегда можем выбрать прямоугольную систему координат на плоскости так, чтобы вещественная ось совпадала с осью абсцисс, а число i лежало на оси ординат на расстоянии единичного отрезка от начала координат.



Число i можно рассматривать как единичный вектор, направленный перпендикулярно вещественной оси. Откладывая этот вектор несколько раз вдоль оси ординат (мнимой оси), мы можем получать числа $2i$, $3i$, $-i$ и т.д.

Сложение на вещественной оси эквивалентно параллельному переносу. Например, сложение с числом 3 — это параллельный перенос направо на 3. По аналогии сложение с числом $2i$ — это параллельный перенос точек плоскости вверх на 2. Комплексному числу $3 + 2i$ можно сопоставить точку плоскости с координатами $(3; 2)$, в которую в результате композиции двух параллельных переносов переходит начало координат.



Каждой точке плоскости с координатами $(t; s)$ мы можем сопоставить комплексное число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Комплексным числом z называется сумма вида $t + si$, где $t, s \in \mathbb{R}$, i — мнимая единица.

При этом число t называется вещественной (действительной) частью комплексного числа, а число s — его мнимой частью.

Обозначение: $t = \mathrm{Re}(z)$, $s = \mathrm{Im}(z)$.

Координатная плоскость с вещественной и мнимой осями называется **комплексной плоскостью**.

Докажем, что не может быть, чтобы одному и тому же комплексному числу соответствовали две различные точки плоскости. Действительно,

$$r + vi = t + si \quad \Rightarrow \quad (r - t) = (s - v)i$$

Если $r \neq t$, то из этого равенства следует, что $i \in \mathbb{R}$.
Значит, $r = t$ и, следовательно, $s = v$.
Вывод: комплексных чисел никак не меньше, чем всех точек плоскости.

На следующем уроке мы изучим арифметические действия с комплексными числами.